äquival: $A = \boxed{S}\, B\, \boxed{T}$ $\qquad$ S, T invertierbar.

ähnlich: $A = S^{-1} B S$

Satz: Sei $A \in M(n \times m)$, $\exists$ B äquivalent zu A.

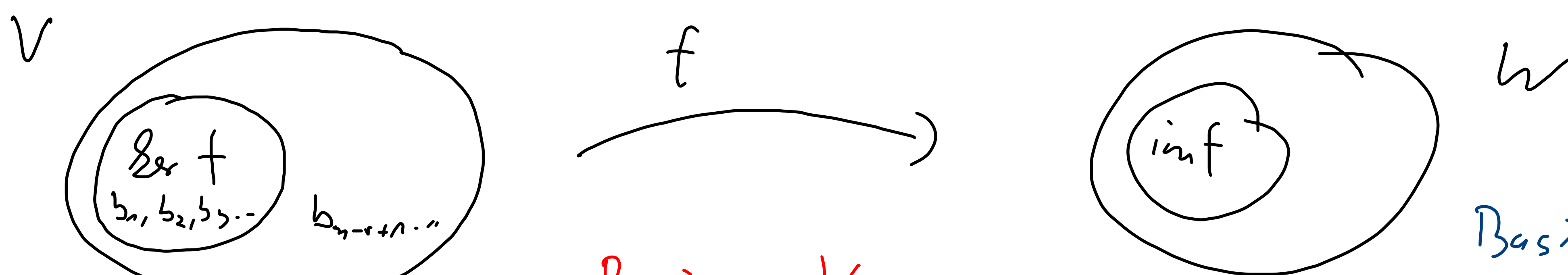
$$\begin{pmatrix} 0 & E_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E_r ist die $r \times r$ Einheitsmatrix

r ist rang A.

<u>Beweis</u>: Sei $f: V \to W$ linear, $\dim V = n$ $\dim W = m$

z.z. $\exists$ Basen von V und W, so dass $M^{A}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,



Basis von Im f

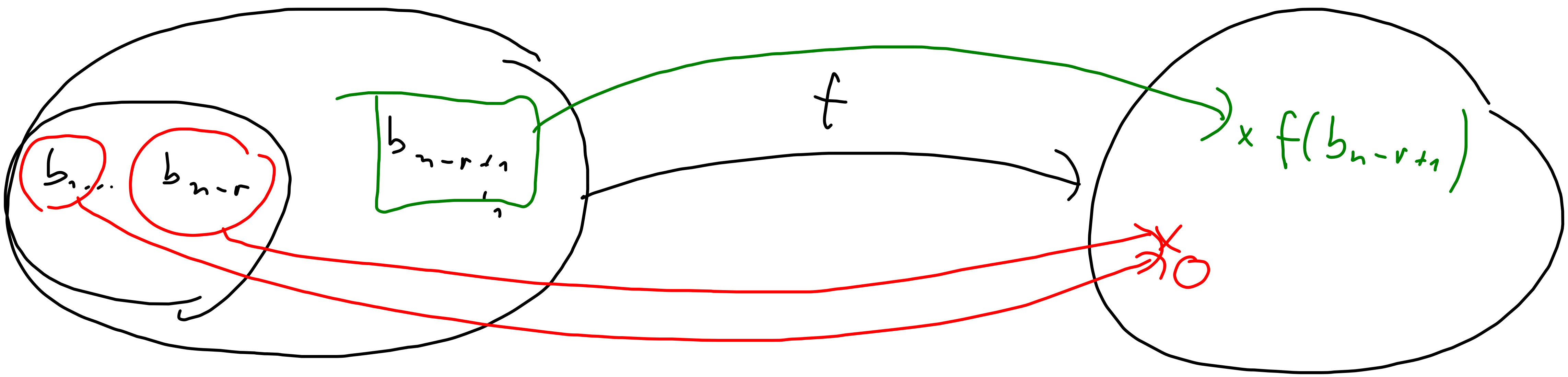
Basis der Kernen $\qquad$ Basis von V

$\{b_1, b_2 .. b_{n-r}, b_{n-r+1}, \ldots b_n\}$ $\qquad$ $\{f(b_{n-r+1}), f(b_{n-r+2}), \ldots, f(b_n)\}$

$f(b_1) = 0 \qquad f(b_2) = 0 \quad \ldots \quad f(b_{n-r}) = 0$

$f(b_{n-r+1}) = f(b_{n-r+1})$

$\vdots$



Die entsprechend darstellende Matrix ist also:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Korollar: Zwei Matrizen A, B sind genau dann äquivalent, wenn sie vom selben Typ sind (d.h. je gleiche Anzahl von Zeilen sowie Spalten) und den selben Rang haben.

Beweis: Falls $A, B \in M(n \times m)$, jeweils mit Rang r sind, so sind beide äquivalent zu $\begin{pmatrix} 0 & E_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (d.h. "$\Leftarrow$" gilt)

"$\Rightarrow$": Falls die Matrizen A, B äquivalent sind, so ist der Typ gleich, da die Transformationen S und T quadratisch sind.
Außerdem sind beides darstellende Matrizen des selben Homomorphismus (fasse S und T als Basiswechsel auf).
$\Rightarrow$ sie haben den selben Rang.

<u>Satz</u>: Jede invertierbare Matrix $A \in M(n \times n)$ kann als Produkt von Elementarmatrizen vom Typ (i) und (ii) geschrieben werden.

<u>Beweis</u>: Erinnern wir uns an den Basisaustauschsatz:

Gegeben eine Basis $\mathcal{B} = \{ b_1, \dots, b_n \}$ und eine linear unabhängige Menge $\mathcal{L} = \{ \ell_1, \dots, \ell_r \}$ $r \leq n$.

Dann kann man eine Basis bilden: $\mathcal{A} = \{ \ell_1, \dots, \ell_r, \underbrace{b_2 \dots}_{\text{Elemente aus } \mathcal{B}} \}$

1. Schritt $\ell_1 = \sum \alpha_j b_j \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(\sum_{j \neq k} -\alpha_j b_j + \ell_1 \right)}$

2. Schritt $\ell_2 = \sum \dots$

Hier

$A = \begin{pmatrix} b_1, \dots & b_n \end{pmatrix}$ wähle $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \dots \right\}$ kanonische Einheitsbasis.

$\xrightarrow{\text{elementare Spaltenumformungen (i) – (iv)}}$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} b_1 \dots, b_{k-1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_{k+1}, \dots b_n \end{pmatrix}$

usw ..

Man erhält durch entsprechende Spaltentrafos eine Matrix, deren Spalten alles Einheitsvektoren sind

$$A = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \right)$$

Durch Umsortieren der Spalten (elementare Spaltentrafo) erhält man die Einheitsmatrix.

$\Rightarrow$ Es existieren Elementarmatrizen S_j $j \in \{1, \dots, m\}$ so dass

$$A \cdot \left(\prod_{j=1}^{m} S_j \right) = E_n$$

Dabei kann man Typen iii) und iv) durch Produkte aus i) und ii) ersetzen.

$$\boxed{A = \prod_{j=m}^{1} S_j^{-1}} = \left(\prod_{j=1}^{m} S_j \right)^{-1}$$

$\square$

Bsp:

$$A \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = E_n \quad \Big| \; S_3^{-1} \; S_2^{-1} \; S_1^{-1}$$

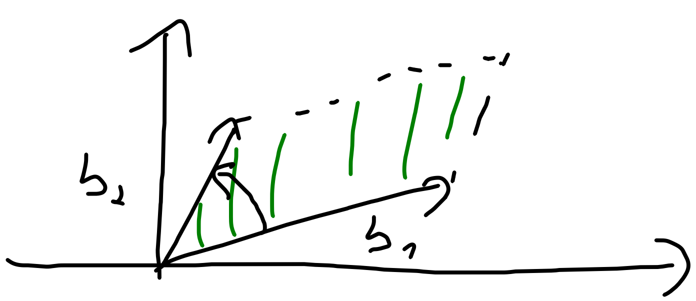
$$A \cdot \cancel{S_1} \cdot \cancel{S_2} \cancel{S_3 \cdot S_3^{-1}} \cancel{S_2^{-1}} \cdot \cancel{S_1^{-1}} = \cancel{E} \cdot S_3^{-1} \cdot S_2^{-1} \, S_1^{-1}$$

9. Determinanten

In diesem Kapitel betrachten wir nur quadratische Matrizen. Wir suchen eine Formel, die uns eine Aussage über die Invertierbarkeit der Matrix liefert.

Erinnerung: A invertierbar $\Leftrightarrow$ A ist ein Basiswechsel $\Leftrightarrow$ A ist Produkt von Elementarmatrizen $\Leftrightarrow$ Spalten von A sind Basis des $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ Zeilen von A sind Basis des $\mathbb{R}^n$.

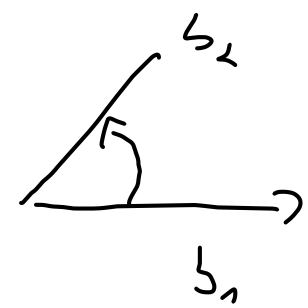
In zwei ~~Dimensionen~~ Dimensionen betrachten wir das "Volumen" des von den Spalten aufgespannten Parallelogramms $A = (b_1, b_2)$

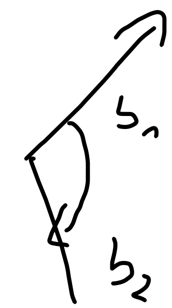


Falls dies 0 ist sind b_1 und b_2 linear abhängig und umgekehrt.

Das gilt genauso für größere Dimension.

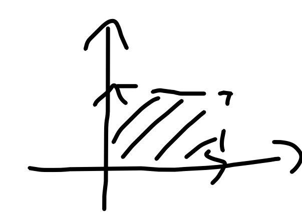
Wir betrachten das sogenannte signierte Volumen, d.h. wir versehen das Volumen mit einem Vorzeichen (+ oder −) je nach der Orientierung der Vektoren.

$+$: 

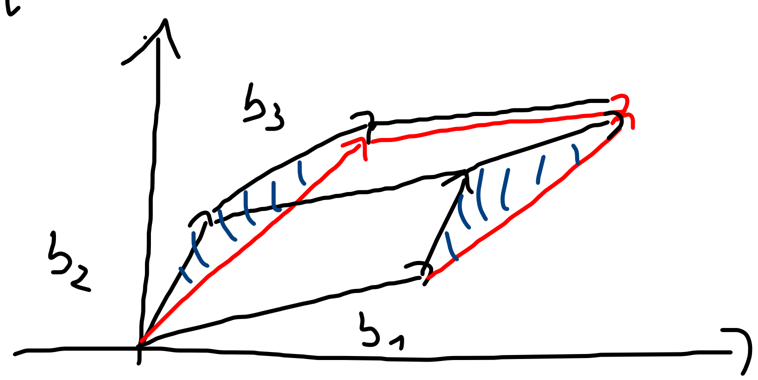
$-$: 

Betrachte zunächst $d = 2$. Durch die Signierung gilt folgendes:

Eigenschaften der Fläche: 1) Für E_2 ist die Fläche 1



2)

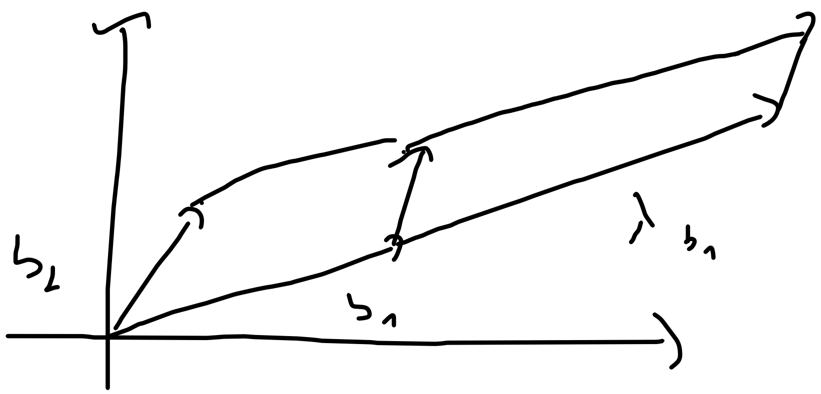


$A = (b_1\ b_2)$ $\qquad$ $B = (b_1\ b_3)$

$C = (b_1\ \ b_2 + b_3)$

Es gilt: Fläche(A) + Fläche(B) = Fläche(C)

Selbiges gilt für Spalte 1, die Matrix ist
also linear in jeder Spalte,



$$\text{Fläche}(b_1, \lambda b_2) = \lambda \,\text{Fläche}(b_1, b_2)$$

Hierfür benötigen wir die Signierung der Fläche!

$$\text{Fläche}(b_1, b_2) + \text{Fläche}(b_1, -b_2) = \text{Fläche}(b, 0) = 0$$

3) Falls zwei Spalten identisch sind ist die Fläche 0.

All diese Eigenschaften gelten in beliebigen Dimension.

<u>Satz und Definition</u>: Sei $\det : M(n \times n) \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\det E_n = 1$ (Normierung)

2) det ist linear in jeder Spalte (Multilinearität)

d.h. $\det(s_1, s_2 \dots s_\ell, \dots s_n) + \lambda \det(s_1 \dots, t_\ell, \dots s_n) =$
$\det(s_1, s_2 \dots, s_\ell + \lambda t_\ell, \dots s_n)$

3) $\det A = 0$ falls A zwei identische Spalten hat.
(Alterniertheit).

Die hierdurch eindeutig bestimmte Abbildung nennt man Determinante.

Beweis der Eindeutigkeit: Wir zeigen, dass durch 1), 2) und 3) det A bereits festgelegt ist.

Sei dazu A eine beliebige $n \times n$-Matrix.

1. Fall: A ist nicht invertierbar. $\Rightarrow$ eine Spalte von A lässt sich als Linearkombination der anderen Spalten schreiben. O.B.d.A. nehmen wir an, dies sei Spalte 1

$$\det(A) = \det(s_1, \ldots s_n) = \det\left(\sum_{j=2}^{n} \alpha_j s_j, s_2, \ldots\right) \overset{2)}{=}$$

$$\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \underbrace{\det(s_j, s_2 \ldots s_n)}_{=0 \text{ wegen } 3)} = 0$$