$f(v) = \lambda v \qquad \lambda \in \mathbb{C}$ (bzw $\mathbb{R}$)

$v \in V \setminus \{0\}$

$A \cdot v = \lambda \cdot v$

$\det(\underbrace{A - \lambda E_n})$ charakt. Polynom

Satz (Fundamentalsatz der Algebra): Im Komplexen zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren. $P(\lambda) = c \cdot (\lambda - n_1)^{k_1} \cdot (\lambda - n_2)^{k_2} \cdots (\lambda - n_m)^{k_m}$

Beweis: Siehe Funktionentheorie.

Bemerkung: Das charakteristische Polynom hängt nicht von der Basiswahl ab:

$A \to TAT^{-1} = B$

$A - \lambda E_n \to T(A - \lambda E_n)T^{-1} = TAT^{-1} - \lambda T\cancel{E_n}T^{-1} = B - \lambda E_n$

$\det(A - \lambda E_n) = \det(B - \lambda E_n)$

Das charakteristische Polynom ist ein Polynom n-ten Grades.

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jj}\right)} + \dots + \det A$$

Def: Die Summe der Diagonaleinträge einer Matrix $\sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ nennt man Spur der Matrix.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}-\lambda} \end{pmatrix}$$

Korollar: Die Spur ähnlicher Matrizen ist identisch.

Beweis: Spur ist ein Koeff. im char. Polynom. Dieses ändert sich nicht bei $A \to B = TAT^{-1}$. □

## Geometrische und algebraische Vielfachheit

Def: Sei $\lambda$ der Eigenwert eines Endomorphismus $f: V \to V$, $V$ endlich dimensionaler $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{R}$ Vektorraum, Dann nennt man die Dimension des Eigenraumes von $\lambda$ <u>geometrische Vielfachheit</u> des Eigenwertes $\lambda$

und die Vielfachheit von $\lambda$ als Nullstelle im charakterist. Polynom algebraische Vielfachheit von $\lambda$.

Satz: a) $geo(\lambda) = 0 \iff alg(\lambda) = 0$

(bzw $geo(\lambda) \neq 0 \iff alg(\lambda) \neq 0$)

b) $geo(\lambda) \leq alg(\lambda)$

Bemerkung: Die Aussage $geo(\lambda) = alg(\lambda)$ gilt im Allgemeinen nicht!

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

$\det(A - \lambda E_n) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \boxed{-\lambda} \end{pmatrix} = \lambda^2$ (char. Polynom)

Einzige Nullstelle ist $\lambda = 0$, diese ist doppelt, d.h. $alg(0) = 2$.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist zugehöriger Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

Der Eigenraum zu $\lambda = 0$ kann nur Dimension 1 oder 2 haben, als UVR von $\mathbb{C}^2$. "2" fällt aus: Dann wäre der Eigenraum der ganze $\mathbb{C}^2$ d.h. $Av = 0 \ \forall v$, d.h. $A$ ist Nullmatrix. Ist sie aber nicht!

Beweis des Satzes: a) hatten wir bereits oben: Falls das char. Pol. eine Nst hat gibt es ein EV und umgekehrt.

b) Sei $k = \text{geo}(\lambda)$. Der Eigenraum zu $\lambda$ hat dim $k$.
Wähle eine Basis $(b_1, \ldots b_k)$ des Eigenraumes und ergänze diese zu einer Basis $(b_1, b_2 \ldots b_k, b_{k+1}, \ldots b_n)$ des Vektorraumes.
Wie sieht der Endomorphismus in dieser Basis aus?

$$\begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & \lambda-\mu & 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \lambda-\mu & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ?-\mu & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ?-\mu & ? \\ 0 & 0 & 0 & ? & ? & ?-\mu \end{pmatrix}$$

Wie sieht das char. Pol aus?

$$\text{char}(\mu) = \det \begin{pmatrix} \boxed{\lambda-\mu} & 0 & & \\ 0 & \boxed{\lambda-\mu} & & \\ 0 & 0 & \boxed{\ldots} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} = (\lambda-\mu)^k \cdot \text{Rest}(\mu)$$

Die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda$ ist also mindestens $k$.

$$\det B = \sum_\sigma b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n\sigma(n)} \, \text{sgn}(\sigma) = \sum_\sigma \underbrace{b_{11} b_{22} \ldots b_{kk}}_{(\lambda-\mu)^k} b_{\sigma(k+1)\,k+1} \ldots$$

$$\sum b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \ldots$$

**Satz** (Hilfssatz über normale End):

Sei $v$ ein Eigenvektor eines normalen Endomorphismus $f$ zum Eigenwert $\lambda$. Dann ist $v$ auch Eigenvektor von $f^*$, der Eigenwert ist $\bar{\lambda}$. ($V$ ist endlich dim. $\mathbb{C}$-oder $\mathbb{R}$-VR).

**Beweis:** $\boxed{f^*(v) = w = \alpha v + v^{\perp}}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ $\langle v^{\perp}, v \rangle = 0$

(Def $v^{\perp} = w - \alpha v$, wähle $\alpha$ so dass $\langle v^{\perp}, v \rangle = 0$)

z.z.: 1) $v^{\perp} = 0$ 2) $\alpha = \bar{\lambda}$

$$\langle f^*(v), v \rangle = \langle \alpha v + v^{\perp}, v \rangle = \bar{\alpha} \langle v, v \rangle$$

$$= \langle v, f(v) \rangle = \lambda \langle v, v \rangle \Rightarrow \alpha = \bar{\lambda}$$

Aus Satz oben: $\|f(v)\|_2^2 = \|f^*(v)\|^2$

$$\text{l.s} = \langle f(v), f(v) \rangle = \bar{\lambda}\lambda \langle v, v \rangle$$

$$\text{r.s} = \langle f^*(v), f^*(v) \rangle = \langle \bar{\lambda} v + v^{\perp}, \bar{\lambda} v + v^{\perp} \rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle v, v \rangle + 0 + 0 + \langle v^{\perp}, v^{\perp} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v^{\perp}, v^{\perp} \rangle = 0 \Rightarrow v^{\perp} = 0$$

<u>Satz</u> (Spektralsatz): Sei f ein normaler Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum.
Dann gibt es eine ONB so dass die entsprechende Darstellende Matrix $D = M_{ONB}^{ONB}(f)$ diagonalgestalt hat.
Es gilt die Umkehrung: Falls es eine ONB gibt, so dass $D$ diagonal ist, dann ist f normal.