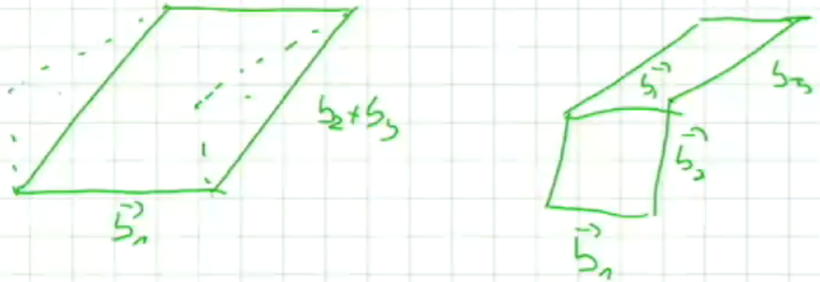


Beweis der Eindeutigkeit: <u>1. Fall</u>: A ist nicht invertierbar

$\Rightarrow \quad \det A = 0$

<u>2. Fall</u>: A ist invertierbar:

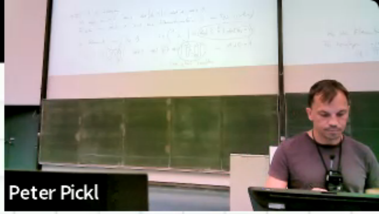
Wir zeigen zunächst dass $\det(A \cdot S) = \det A \cdot \det S$

für jede $n \times n$ Matrix A und eine Elementarmatrix S vom Typ i) oder ii)

Die Determinante von Typ i): $S = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det S \overset{2)}{=} \lambda \cdot \det E_n \overset{1)}{=} \lambda$

Typ ii) $S = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & \overset{2)}{\downarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \det S = \det E + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

zwei gleich



z.z. $\det(A \cdot S) = \det A \cdot \det S$

Fall i) S ist vom Typ i)

S multipliziert die entsprechende Spalte mit Faktor λ. $\Rightarrow$ Wegen der Multilinearität gilt:

$$\det(AS) = \det(a_1, a_2 \ldots \lambda a_j \ldots a_n) \overset{2)}{=} \lambda \det(a_1, \ldots a_j, \ldots a_n) =$$
$$= \lambda \det A = \det A \, \det S$$

Fall ii) S ist Typ ii)

$$\det(A \cdot S) = \det(a_1 \ldots \underset{i\text{-te Spalte}}{a_i + a_j} \ldots \underset{j\text{-te Spalte}}{a_j} \ldots a_n) \overset{2)}{=} \det(a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n) +$$
$$+ \det(a_1 \ldots a_j \ldots a_j \ldots a_n)$$

$$= \det A + 0 = \det A \cdot 1 = \det A \cdot \det S$$

Von den Elementarmatrizen i) ii) kennen wir also die Determinante.

Für beliebiges, invertierbares A benutzen wir den letzten Satz.

$$A = \prod_{j=1}^{m} S_j \qquad m \in \mathbb{N}.$$

$$\det(A) = \det(\overbrace{S_1\ S_2}^{A}\ S_3) = \det(\overbrace{S_1 S_2}^{A}) \cdot \det S_3 =$$

$$= \det S_1 \cdot \det S_2 \cdot \det S_3$$

$$\left(\det(AS) = \det A \ \det S \right)$$

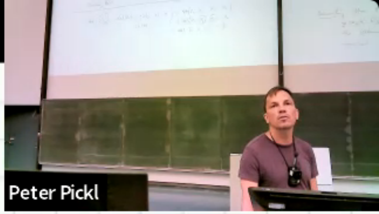
allgemein: $A = \prod_{j=1}^{m} S_j \Rightarrow \det A = \prod_{j=1}^{m} \underbrace{\det S_j}_{\text{alle gegeben.}}$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & \overset{\downarrow}{1} \\ \vdots & 1 & \\ \vdots & & 1 \end{pmatrix} = \det(e_1 e_2 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{te Stelle}}}{e_i + e_j} \dots e_j \dots e_n) = \det(e_1 \dots e_i \dots e_j \dots e_n)$$

$$+ \det(e_1 \dots e_j \dots e_j \dots e_n)$$

$$= \det E + 0 = 1$$



Satz: Vertauscht man zwei Spalten einer Matrix, ändert die Determinante nur das Vorzeichen.
(Daher der Begriff „Alterniertheit")

Beweis: $\det(\ldots\ a+b\ \ldots\ a+b\ \ldots) = 0$ da zwei identische Spalten.

$$\overset{2)}{=} \cancel{\det(\ldots\ a\ \ldots\ a\ \ldots)} + \det(\ldots\ a\ \ldots\ b\ \ldots) + \det(\ldots\ b\ \ldots\ a\ \ldots) + \cancel{\det(\ldots\ b\ \ldots\ b\ \ldots)}$$

$$\Rightarrow \det(\ldots\ a\ \ldots\ b\ \ldots) = -\det(\ldots\ b\ \ldots\ a\ \ldots)$$

Bemerkung: Man kann Axiom „Alterniertheit" auch durch die im Satz gezeigte Eigenschaft ersetzen und erhält eine äquivalente Definition der Determinante. Denn $\det(\ldots a \ldots b \ldots) = -\det(\ldots b \ldots a \ldots)$ impliziert $\det(\ldots a \ldots a \ldots) = 0$ (Tauschen der Spalten ändert das Vorzeichen aber das Resultat muß gleich bleiben)

Satz: a) $\det A^t = \det A$

b) Falls A invertierbar gilt: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

c) $\det(A\,B) = \det A \cdot \det B$

Beweis: a) 1. Fall: A ist nicht invertierbar, d.h. $\operatorname{rang} A < n$

$\Leftrightarrow \operatorname{rang} A^t < n \Leftrightarrow A^t$ ist nicht invertierbar.

Wie im Beweis des letzten Satzes gesehen ist für nicht invertierbare Matrizen die Determinante 0. $\Rightarrow$ Beh. „$0 = 0$"

2. Fall: A ist invertierbar $\Rightarrow A = \prod_{j=1}^{m} S_j \qquad m \in \mathbb{N}$.

$$A^t = \prod_{j=m}^{1} S_j^t$$

Die Typ ii) Matrizen haben Determinante 1

die Typ i) Matrizen: $S = S^t$

$$\det A = \prod_{j=1}^{m} \det S_j = \prod_{j=1}^{m} \det S_j^t = \det A^t$$

(Wir haben wie oben benutzt, dass $\det(\tilde{A}\,S) = \det(\tilde{A}) \det S$)

c) z.z. $\det AB = \det A \; \det B$.

1. Fall: A oder B ist nicht invertierbar

$\Leftrightarrow \dim \ker A \geq 1$ oder $\dim \ker B \geq 1$

$\Rightarrow \dim \ker AB \geq 1 \Rightarrow \det AB = 0$

$\det A \cdot \det B = 0$ ✓

2. Fall: A und B invertierbar.

$A = \prod_{j=1}^{m} S_j \qquad B = \prod_{j=1}^{\ell} T_j \qquad S_j, T_j$ Elementar i), ii)

$\Rightarrow A \cdot B = \prod_{j=1}^{m} S_j \prod_{j=1}^{\ell} T_j$

$\Rightarrow \det A \cdot \det B = \prod_{j=1}^{m} \det S_j \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \det T_j = \det(A \cdot B)$

b) $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ (wegen c))

$\|$

$\det E = 1 \Rightarrow$ Beh.

Korollar: $\det A \neq 0 \iff A$ invertierbar

Beweis: Alle Elementarmatrizen haben Determinante $\neq 0$.
$\det A = 0$ falls A nicht invertierbar haben wir gesehen.
Falls A invertierbar ist $\det A = \prod \det S_i \neq 0$

Korollar: Teil a) des letzten Satzes sagt aus, dass sich bei Vertauschen der Rolle von Zeilen und Spalten die Determinante nicht ändert. Daher gilt, dass Determinanten auch multilinear in allen Zeilen sind, sowie Null bei zwei identischen Zeilen.
Außerdem wechseln sie das Vorzeichen, wenn man Zeilen vertauscht.

Bemerkung: Man erhält eine äquivalente Definition der Determinante über die Zeilen.

Determinante für 2×2 Matrizen

Formel: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$

Beweis: 1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1$ ✓

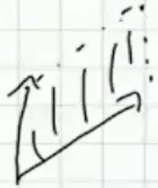
2) $\det\begin{pmatrix} a & \lambda b_1 + b_2 \\ c & \lambda d_1 + d_2 \end{pmatrix} = a(\lambda d_1 + d_2) - (\lambda b_1 + b_2)\cdot c =$

$= \lambda(a d_1 - b_1 c) + a d_2 - b_2 c$

$= \lambda \det\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{pmatrix}$ ✓

Spalte 1 analog

3) $\det\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$ ✓



Bsp: $\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 - (-2)\cdot 3 = 6$

Determinante für $n=3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd$$

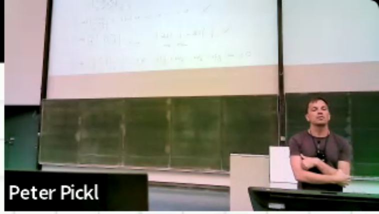
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$ ✓

2) $\det\begin{pmatrix} a & b & \lambda c_1 + c_2 \\ d & e & \lambda f_1 + f_2 \\ g & h & \lambda i_1 + i_2 \end{pmatrix} = \ldots = \lambda \det(\ldots) + \det(\ldots)$ ✓

wie oben

3) $\det\begin{pmatrix} a & a & e \\ d & d & f \\ g & g & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & a \\ d & d \\ g & g \end{matrix} = adi + afg + edg - edg - afg - adi = 0$



geht analog, falls 1. und 3. Spalte oder 2. und 3. Spalte identisch.

Alternativ kann man das Spatprodukt verwenden:

$$\det\left(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$