Def.: $f: V \to W$ $\quad f$ linear $:\Leftrightarrow$

a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

b) $f(\lambda \cdot a) = \lambda f(a)$

Bsp: a) Sei P der Vektorraum aller Polynome (z.B. reelle Polyn.)

Betrachte: $f: P \to P$ gegeben durch

$f(a) = a'$, a) ✓ b) ✓

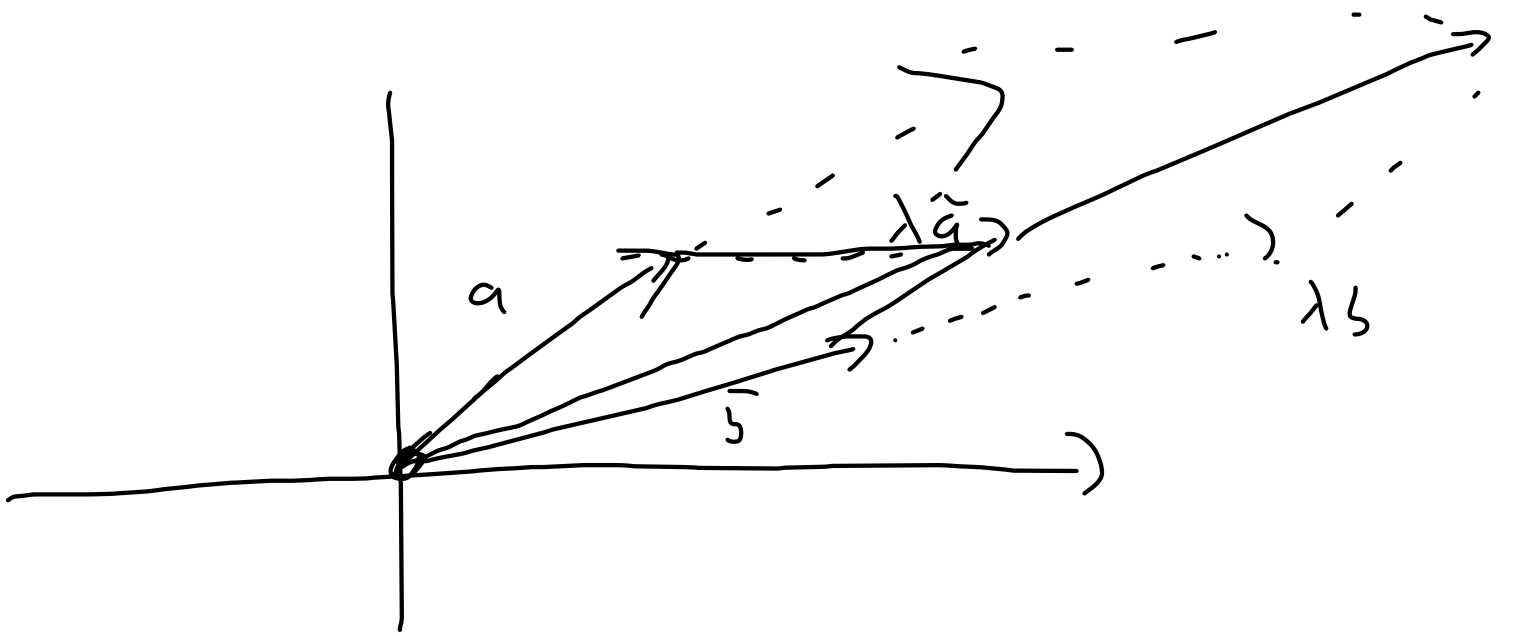
Differentiation ist linear.

b) $g: P \to P$ $\quad g(a) = \int_0^x a(t)\, dt$

a) ✓ b) ✓

Integration ist linear.

c) $\mathbb{R}^n$. Eine zentrische Streckung um einen Faktor λ mit dem Ursprung als Zentrum ist linear



$v \to \lambda v$ a) ✓ b) ✓.

Satz: Sei $f: V \to W$ linear, U sei UVR von W. Dann ist $f^{-1}(U)$ ein UVR von V.

Beweis: Hausaufgabe.

(Satz): Sei $f: V \to W$ linear, U sei UVR von V, dann ist die Einschränkung $f|_U : U \to W$ linear.

Beweis: Offensichtlich dass Linearität bei Einschränkung auf U erhalten bleibt.

Satz: Die Komposition linearer Abbildungen ist wieder linear.

Beweis: Seien $f: V \to W$, $g: W \to U$ linear

Dann gilt: a) $g \circ f(a+b) = g(f(a+b)) = g(f(a)+f(b))$
$$= g(f(a)) + g(f(b)) = g\circ f(a) + g \circ f(b)$$

b) $g \circ f(\lambda a) = g(f(\lambda a)) = g(\lambda f(a)) = \lambda g(f(a)) = \lambda g \circ f(a)$

$\square$

(**Notation**: $f: A \to B$, $T \subset A$. $f|_T : T \to B$
$f|_T(x) := f(x)$)

Satz: Seien also V, W Vektorräume über einem Körper K.
Die Menge aller linearen Abbildungen von $V \to W$ ist selbst ein Vektorraum. $\oplus$ und $\odot$ sind hier die Addition und skalare Multiplikation in W punktweise ausgeführt.

Beweis: Das neutrale Element n ist die Abbildung, die alle Elemente aus V auf den Nullvektor (in W) abbildet.

$$(n \oplus f)(x) = n(x) + f(x) = f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow n \oplus f = f.$$

$$(\ominus f)(x) = -f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \text{Existenz des Inversen.}$$

(Bemerkung: die obige Abbildung n ist in der Tat linear und geht von $V \to W$, dies ist einfach zu sehen).

Alle Rechenregeln vererben sich durch punktweise Anwendung von W nach "$\{V \to W \text{ linear}\}$".

Definition: Für einen K-Vektorraum V nennt man die Menge aller linearen Abbildungen von V nach K den Dualraum von V. (Ist ein VR auf Grund des letzten Satzes).

Definition: Sei $f : V \to W$ linear. Die Menge aller Vektoren aus V, die von f auf die 0 abgebildet werden, nennt man Kern von f:

$$\ker(f) := \{ v \in V : f(v) = 0 \}.$$

Die Menge aller Bildvektoren von f nennt man Bild von f.

$$\operatorname{im}(f) := \{ w \in W : \exists\, v \in V \text{ so dass } f(v) = w \}.$$

Satz: $\ker(f)$ ist in jedem Fall ein Untervektorraum von V
und $\operatorname{im}(f)$ " " " " " " W.

Beweis: Erinnerung: Für die UVR-Eigenschaft reicht es zu zeigen, dass a) $v + w \in \ker(f)$ falls $v, w \in \ker(f)$

und b) $\lambda v \in \ker(f)$ falls $v \in \ker(f)$, $\lambda \in K$.

(im analog).

"ker f": Seien $v, w \in \ker(f)$, $\lambda \in K$

$\Rightarrow$ $f(v) = 0$, $f(w) = 0$

Linearität $\Rightarrow$ $f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ $v + w \in \ker(f)$

Außerdem: $f(\lambda \cdot v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität}}}{=} \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda \cdot v \in \ker(f)$.

"im(f)": Seien $v, w \in \operatorname{im}(f)$, $\lambda \in K$

$\Rightarrow$ $\exists\, a, b \in V$ mit $f(a) = v$ und $f(b) = w$.

Linearit. $\Rightarrow$ $\underbrace{f(\underbrace{a+b}_{\in V})}_{\in \operatorname{im}(f)} = f(a) + f(b) \quad \Rightarrow \quad f(a) + f(b) \in \operatorname{im}(f)$

$f(\lambda \cdot a) = \lambda\, f(a) \quad \Rightarrow \quad \lambda\, f(a) \in \operatorname{im}(f)$.

Bsp: Betrachte die Menge aller "Parabeln" P.
Die Ableitung bildet P auf P ab.

Der Kern besteht aus allen Funktionen vom Grad 0.
d.h. allen konstanten Funktionen ($\dim = 1$).

Das Bild besteht aus allen Polynomen maximal ersten Grades.
($\dim$ 2).

Satz: Sei V endlich dimensional, $f: V \to W$ linear.
Dann: $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V)$

Notation: Die Dimension des Bildes nennt man auch
Rang der Abbildung.

Beweis: Sei $f: V \to W$ linear, $\dim V = n < \infty$.

Betrachte $\ker f \subset V$. Dieser ist UVR von V.

$\dim(\ker(f)) := k$ $\quad k \leq n$ da UVR.

Sei $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ eine Basis von $\ker(f)$.

Diese lässt sich zu einer Basis von V ergänzen (Austauschsatz)

$\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots b_n\}$ ist also Basis von V.

z.z. $\{f(b_{k+1}), f(b_{k+2}) \dots, f(b_n)\}$ ist Basis von $\operatorname{im}(f)$

(dies impliziert durch einfaches Nachzählen die Dimensionsformel.

Dazu a) "$\{f(b_{k+1}) \dots f(b_n)\}$ ist ES"

Sei $v \in \operatorname{im}(f)$ beliebig. $\Rightarrow \exists a \in V$, so dass

$v = f(a)$. $\quad a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$ da $\{b_1 \dots b_n\}$ Basis von V.

$\Rightarrow v = f(\sum \alpha_j b_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(b_j) = 0 + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(b_j)$ $\square$

b) " $\{f(b_{k+1}) \dots f(b_n)\}$ ist lin. unabh. ":

Sei $\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(b_j) = 0$ ⊛

(z.z. $\alpha_j = 0 \;\; \forall j \in \{k+1, \dots, n\}$)

Wegen Linearität von f folgt mit ⊛

$$f\left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j b_j\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j b_j =: w \in \ker(f)$$

$$\Rightarrow w = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j b_j = w - w = 0$$

Da $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis, insb. lin. unabhängig

$$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots n\}$$

□