Bemerkung: $\ker f \subset V$, $\operatorname{im} f \subset W$.

Obwohl wir die Dimensionsformel haben, gilt

nicht dass $\ker f \oplus \operatorname{im} f = V$ ↯.

Satz: Sei $f: V \to W$ linear, V sei endlichdimensional.

Dann gilt: a) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$

b) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\dim W = \operatorname{rang} f := \dim(\operatorname{im}(f))$

c) f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\dim V = \operatorname{rang} f$ und $W = \operatorname{im}(f)$

$\Leftrightarrow$ $\dim V = \operatorname{rang} f = \dim W$

Beweis: a) 0 ist immer Element des Kernes, da $f(0) = f(0 \cdot v) = 0 f(v) = 0$.

$\longrightarrow f(v) = f(w) \Leftrightarrow f(v) - f(w) = 0 \underset{\text{linear}}{\Leftrightarrow} f(v-w) = 0 \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} v - w \in \ker(f)$

Falls f injektiv ist gilt $f(v) = f(w)$ $(\Leftrightarrow v-w \in \ker f)$ $\Rightarrow v - w = 0$

Falls im Kern nur die 0, folgt aus $\Rightarrow$ Im Kern ist nur die 0.

$f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$ also ist f injektiv

b) Wir zeigen allgemein: Falls $U \subset V$ UVR ist und

$\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

Wähle Basis von U. Diese hat $n = \dim U$ Elemente.

Wenn man diese zu einer Basis von V ergänzt, benötigt man

keine weiteren Vektoren. Die Basis von U war also bereits Basis von V.

f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} f = W$ Außerdem ist $\operatorname{im} f$ UVR von W.

Deswegen: f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim W$

c) $\dim V = \operatorname{rang} f$ ist gleichbedeutend mit $\dim \ker f = 0$

$\Leftrightarrow$ f injektiv (siehe a) $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

"$\operatorname{im} f = W \Leftrightarrow$ surjektiv" siehe oben

"$\dim(\operatorname{im}(f)) = \operatorname{rang} f = \dim W \Leftrightarrow$ surjektiv" siehe oben.

Isomorphismen

Definition: Eine lineare Abbildung $f: V \to W$ heißt:

a) Isomorphismus, falls f bijektiv ist.

b) Endomorphismus, falls $V = W$

c) Automorphismus, falls f bijektiv und $V = W$.

Wir betrachten hier nur endlich dimensionale Vektorräume V und W.

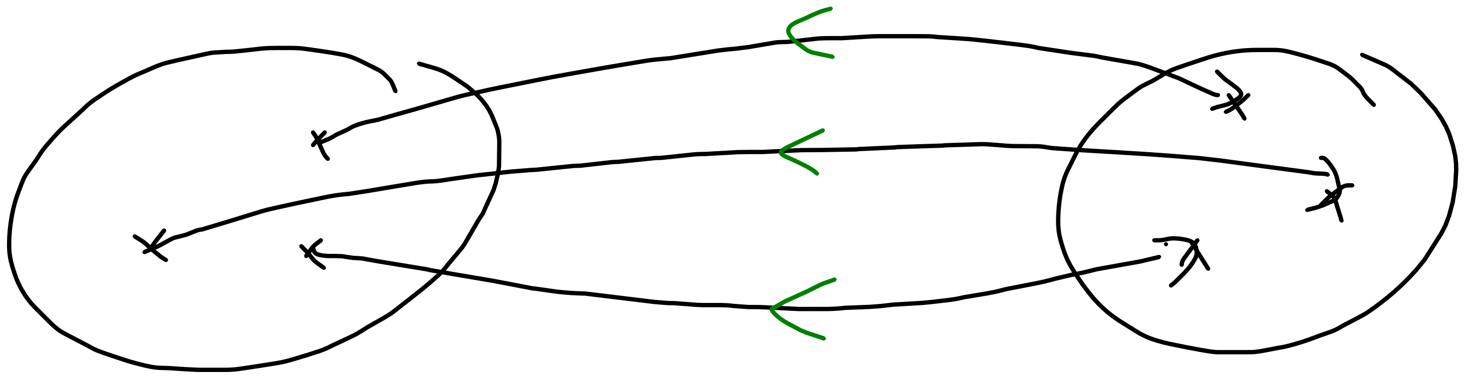
Def: Falls zwischen zwei Vektorräumen V, W ein Isomorphismus existiert, nennt man V und W isomorph. $V \cong W$.

Satz: Isomorphie von VR ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: a) „$V \cong V$" Wähle $f = id_V$, ist offenbar linear und bijektiv ✓

b) „$V \cong W \Rightarrow W \cong V$" Sei also $V \cong W$. $\exists\, f: V \to W$ bijektiv.

Als Isomorphismus $W \to V$ wählen wir die Umkehrabbildung.



$f^{-1}(y) := x$ falls $\cancel{x}\, y = f(x)$

Wir haben also eine bijektive Abbildung $W \to V$ gefunden, nämlich die Umkehrfunktion, <u>es bleibt zu zeigen, dass diese linear ist.</u>

Dann haben wir einen Isomorphismus $W \to V$, also gilt $W \cong V$.

<u>Dazu:</u>

$$f^{-1}(v+w) = f^{-1}(f(a)+f(b)) \quad \text{wobei} \quad a := f^{-1}(v), \quad b := f^{-1}(w)$$

$$\underset{\text{lin. von } f}{=} f^{-1}(f(a+b)) = a+b = f^{-1}(v) + f^{-1}(w)$$

$$f^{-1}(\lambda \cdot v) = f^{-1}(\lambda f(a)) = f^{-1}(f(\lambda a)) = \lambda a = \lambda f^{-1}(v),$$

c) "$V \cong W$ und $W \cong Z \Rightarrow V \cong Z$".

Sei als $V \cong W$ und $W \cong Z$, d.h. $\exists$

$f: V \to W$, $g: W \to Z$ jeweils linear und bijektiv.

$g \circ f$ ist offensichtlich eine Abb. von $V \to Z$.

$g \circ f$ ist als Verknüpfung bijektiver Abbildungen selbst bijektiv.

$g \circ f$ " " " linearer " " linear

(Siehe Satz) $\Rightarrow V \cong Z$ $\square$

<u>Satz</u>: Zwei Vektorräume endlicher Dimension sind genau dann isomorph, wenn ihre ~~Dimension~~ Dimension gleich ist: $\dim V = \dim W \Leftrightarrow V \cong W$.

<u>Beweis</u>: Im Kapitel über die Darstellung von Vektoren hatten wir gesehen, dass die Koordinatisierung eine bijektive, lineare Abbildung von $V \to K^n$ ergibt ($n = \dim V$). Daher ist jeder Vektorraum der Dimension n isomorph zum K^n.

Da Isomorphie eine Äquivalenzrelation ist, sind zwei Vektorräume der selben Dimension isomorph zueinander.

Es bleibt zu zeigen $V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$:

Sei $V \cong W$, OBdA $\dim V > \dim W$ (o. B. d. A)

$\Rightarrow$ Für jede lineare Abbildung $V \to W$ ist

$$\dim V = \dim \ker(f) + \underbrace{\operatorname{rang} f}_{\leq \dim W}$$

$\Rightarrow \dim \ker f > 0 \Rightarrow f$ ist nicht injektiv. $\lightning$ zur Existenz eines Isomorphismus.

Satz: Sei V ein endlich dimensionaler VR, dann bildet die Menge aller Automorphismen auf V zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe.

<u>Beweis</u>: Sei V ein VR $\dim V := n < \infty$.

$A := \{ f : V \to V, \quad f \text{ ist Isomorphismus} \}$

a) neutrales Element ist die identische Abb. id.

b) inverses Element ist jeweils die Umkehrabbild.

(diese ist ein Automorphismus, da von $V \to V$, etc siehe oben).

c) Das Asso.-Gesetz gilt wie immer für die Verknüpfung von Abbildungen: $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) =$

$= h(g(f(x)))$

$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ $\square$

Das Kommutativitätsgesetz gilt in der Regel nicht.

(Bsp: Drehungen im $\mathbb{R}^3$, Drehung + Spiegelung im $\mathbb{R}^2$).