Satz: $f$ normal $\Leftrightarrow$ $\exists$ ONB so dass $M^{ONB}_{ONB}(f)$ ist diagonal

$\left(\Leftrightarrow \exists \text{ ONB von Eigenvektoren}\right)$

"$\Rightarrow$"

<u>Beweis</u>: Wir benutzen hier, dass jeder Eigenvektor von $f$ auch Eigenvektor von $f^*$ ist. Da wir im Komplexen arbeiten, gibt es in jedem Fall einen EV von $f$: $\exists v \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(v) = \lambda v$.

Dies ist unser erster Basisvektor (nach Normierung) $\mapsto b_1$

Betrachte den Untervektorraum $U$ der zu $b_1$ senkrechten Vektoren

$$U = \{ w \in V : \langle w, b_1 \rangle = 0 \}.$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$

Da $f$ normal ist gilt $\forall w \in U$ dass $\langle f(w), b_1 \rangle = 0$ !

Warum?

$$\langle f(w), b_1 \rangle = \langle w, f^*(b_1) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz zur Normalität}}}{=} \langle w, \bar{\lambda} \cdot b_1 \rangle = \bar{\lambda} \langle w, b_1 \rangle = 0$$

d.h. $f(w) \in U$

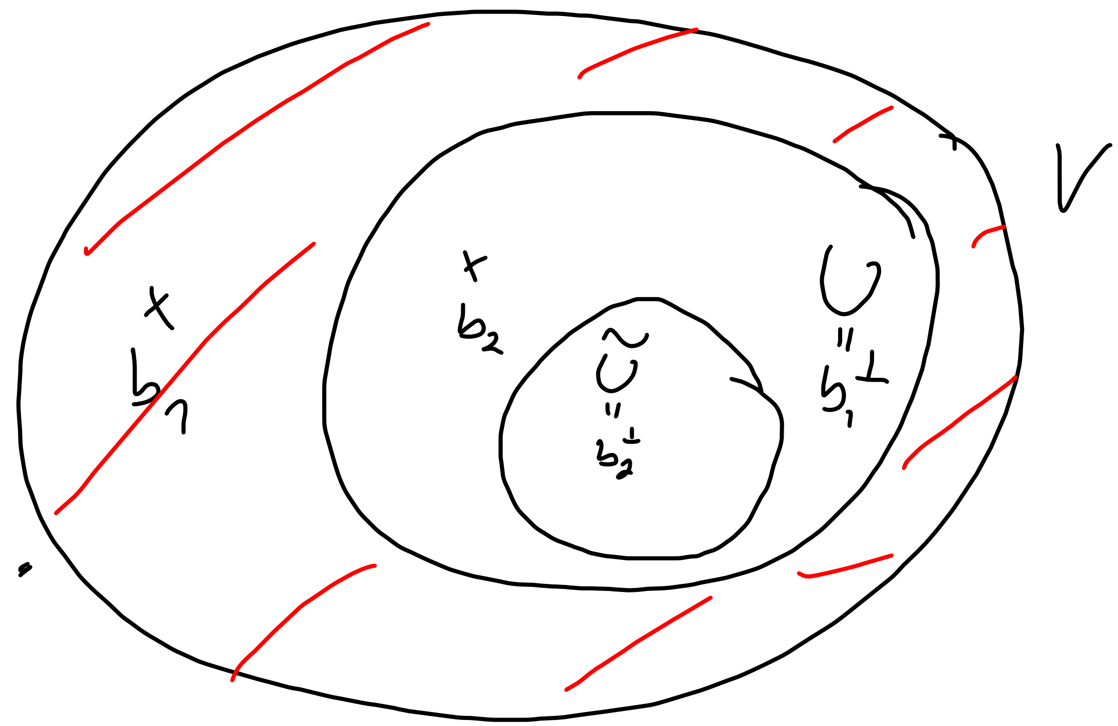
Betrachte $f|_U : U \to U$

$$f|_U (f|_U)^* = (f|_U)^* \cdot f|_U$$

dem: $f f^* u = f^* f u \quad \forall u \in U$

$$\begin{array}{ccc} f f^* u & = & f^* f u \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ (f|_U)(f|_U)^* u & & (f|_U)^* f|_U u \end{array}$$

Auch $f|_U$ ist normal.




Wir wählen einen EV von $f|_U$.

Da $K = \mathbb{C}$ gibt es einen.

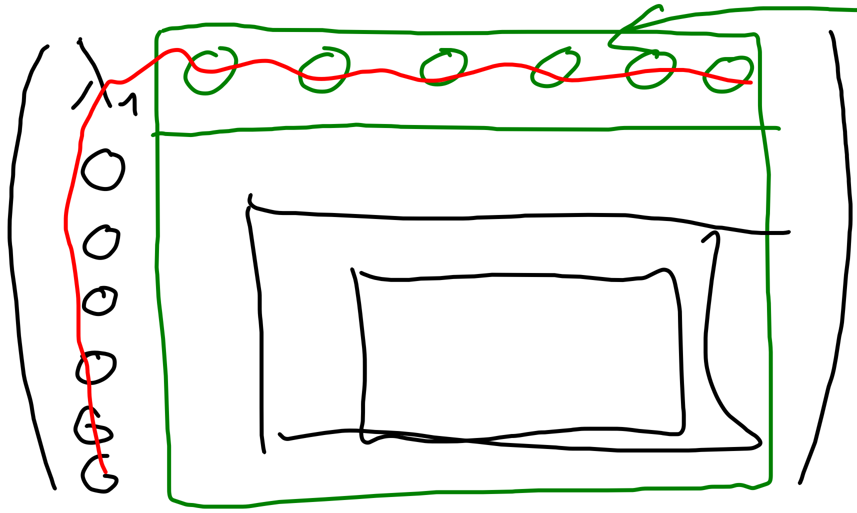
Diesen normieren wir $\rightarrow b_2 \in U \Rightarrow b_2 \perp b_1$.

$\vdots$

Am Ende steht ein Basis von $V$ bestehend aus normierten, paarweise Orthogonalen Eigenvektoren von $f$.

Die entsprechende darstellende Matrix ist diagonal, da $f(b_j) = \lambda_j b_j$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$



da $f$ normal

$b_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Korollar**: Sei $V$ endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-VR. Falls $f: V \to V$ selbstadjungiert ist, dann gibt es eine ONB aus EV von $f$ (eine ONB $B$, so dass $M^{ONB}_{ONB}(f)$ diagonal ist).

**Beweis**: Wir betrachten die reelle Matrix als komplexe Matrix und diagonalisieren diese. Wir müssen darauf achten, dass weder in den Basisvektoren noch in den Eigenvektoren Imaginärteile $\neq 0$ stehen. Da $f = f^* \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ für alle Eigenwerte.

$\Rightarrow$ Alle Eigenwerte sind reell.

$f(v) = \lambda v$ Sei $\tilde{v}$ der Vektor, dessen Komponenten die entsprechenden Realteile sind $\Rightarrow f(\tilde{v}) = \lambda \tilde{v}$. (Falls $\tilde{v} = 0$ wähle Imaginärteil) ..

Definitionen: Eine $n \times n$ Matrix $A$ heisst diagonalisierbar falls es eine invertierbare $n \times n$ - Matrix $T$ gibt, so dass $D = TAT^{-1}$ diagonal ist.

Eine solche Matrix nennt man unitär diagonalisierbar :$\Leftrightarrow$ wenn $T$ außerdem unitär ist.

Bemerkung: a) Der Spektralsatz sagt aus, dass im Komplexen genau die normalen Matrizen die unitär diagonalisierbaren sind.

b) Diagonalisierbar ist eine Matrix genau dann, wenn es eine Basis von Eigenvektoren gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle algebraischen Vielfachheiten mit den geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen.

Satz: Für jeden Endomorphismus ~~auf~~ auf einem endlichdim. $\mathbb{C}$ - VR findet man eine Bassis $\mathcal{B}$, so dass die entsprechende Darstellung eine obere Dreiecksmatrix ist.

Das gilt auch für $K = \mathbb{R}$, falls das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

<u>Beweis:</u>
$$\left(\begin{array}{c|ccccc} \lambda_1 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & \lambda_2 & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right)$$

Wie im Spektralsatz wähle wir zunächst einen Eigenvektor $b_1$ als ersten Basisvektor. Definiere $U = \{ w : \langle w, b_1 \rangle = 0 \}$ und betrachte $g = P_U \, f|_U$. $P_U$ ist hier der Projektor auf den Unterraum $U$.

$P_U$ ist definiert durch $P_U v = v - \dfrac{\langle v, b_1 \rangle b_1}{\|b_1\|_2^2}$

$$\left( \langle P_U v, b_1 \rangle = \langle v, b_1 \rangle - \frac{\langle v, b_1 \rangle \cancel{\langle b_1, b_1 \rangle}}{\cancel{\|b_1\|^2}} = 0 \right)$$

Dadurch ist $g : U \to U$ ein Endomorphismus.

Wähle für $b_2$ einen EV von $g$. ...

**Satz:** Sei $A$ eine komplexe $n \times n$ - Matrix.

$A$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden EW $\lambda$ gilt: $(A-\lambda E)^2 v = 0 \Rightarrow (A - \lambda E) v = 0$.

(d.h. $v$ ist EV zu $\lambda$)

**Beispiel:** Betrachte $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sei $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $A - \lambda E = A$ da $0$ der einzige Eigenwert.

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d.h} \quad (A - \lambda E) v \neq 0$$

$$A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

**Beweis** (Rückrichtung Spektralsatz hatte ich leider vergessen)

z.z.: Sei $f$ so, dass eine ONB existiert mit $M^{ONB}_{ONB}(f) = D$ ist diagonal. In dieser ONB gilt: Adjungierte = transponiert - konjugiert

$D$ ist diagonal $\Rightarrow D^*$ diagonal. $\quad D D^* = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_l|^2 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = D^* D$

$$M^{ONB}_{ONB}(f f^* - f^* f) = D D^* - D^* D = 0 \Rightarrow f f^* - f^* f = 0$$