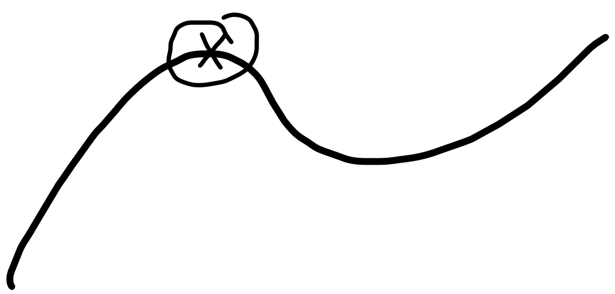
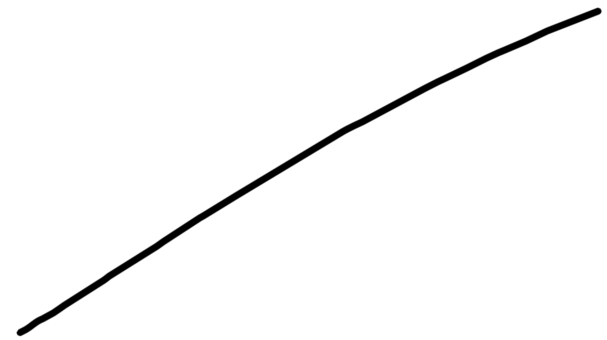
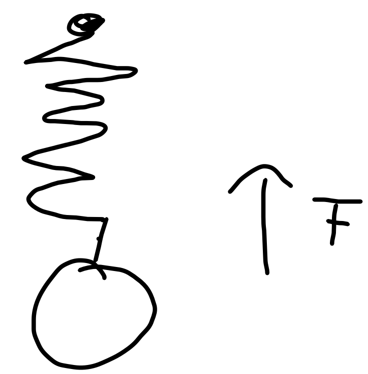
Lineare Algebra





Gesetz von Hook: $F = x \cdot D$

Federhärte



1. Mengen, Relationen, Abbildungen

Grundlagen der Mengenlehre werden vorausgesetzt.

Def: Seien A, B Mengen dann ist $A \times B$ definiert als die Menge aller Paare: $A \times B = \{ (a,b) \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in B \}$

Def: Seien A, B Mengen. Jede Teilmenge von $A \times B$ nennt man (binäre) Relation.

Bsp.: "Person aus A isst gerne Objekt aus B"

$A = \{$Peter, Anna, Klaus$\}$ $\qquad$ $B = \{$Eis, Kuchen ...$\}$

Def: Sei A eine Menge. Eine Relation auf $A \times A$ heißt Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$

a) (Reflexivität): $a \sim a$ für alle $a \in A$.

(x ~ y bedeutet, (x, y) Element der Relation ist)

b) (Symmetrie): $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

c) (Transitivität):

$6 \sim 5 \qquad 5 \sim 8 \qquad 6 \not\sim 8$ ↯

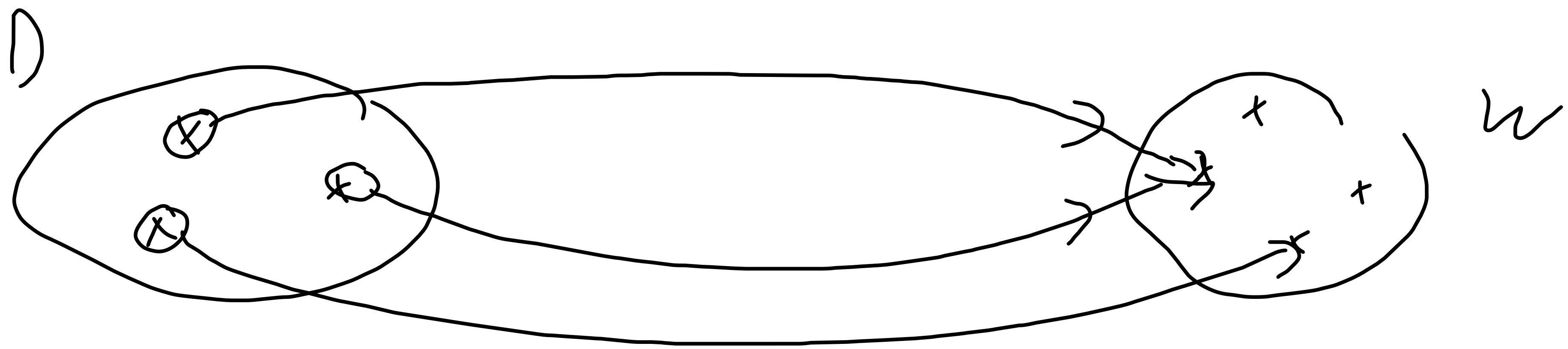
$a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Bsp: a) $A = \mathbb{N}$. $\quad x \sim y :\Leftrightarrow$ x und y haben den selben Rest nach Teilen durch 3.

ist eine Ä. R.

b) $A = \mathbb{N}$ $\quad x \sim y :\Leftrightarrow$ x und y sind teilerfremd: keine ÄR

__Definition__: Seien D, W Mengen. Eine Relation $R \subset D \times W$ nennt man Abbildung $:\Leftrightarrow$ Für alle $x \in D$ existiert genau ein $y \in W$, so dass $x \sim y$ $\big((x,y) \in R\big)$



(Abkürzungen: Für alle "$\forall$", es existiert "$\exists$", es existiert genau ein "$\exists!$")

__Bsp__: $f(x) = x^2$ $\quad D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$. ....

__Bemerkung__: Bzgl der Bilder wird weder Existenz noch Eindeutigkeit gefordert, es gilt nicht $\forall y \in W \ \exists!\, x \in D : x \sim y$

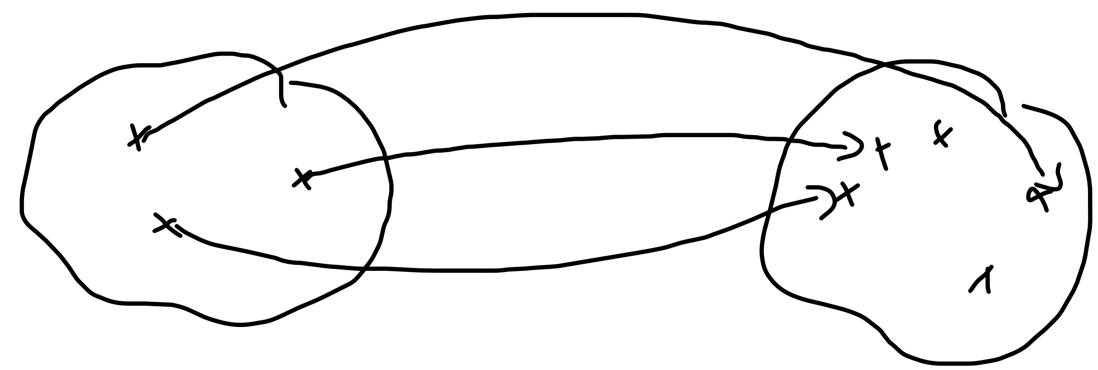
notwendiger Weise

Def: Sei f eine Abbildung. Man nennt f <u>injektiv</u> $:\Leftrightarrow$

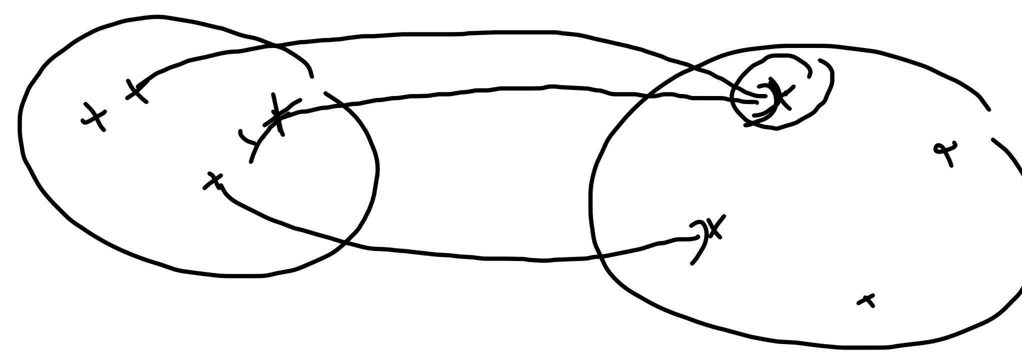
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Bem: Das bedeutet, dass es für jedes $z \in W$ höchstens ein entsprechendes Urbild gibt,

inj:



nicht inj:

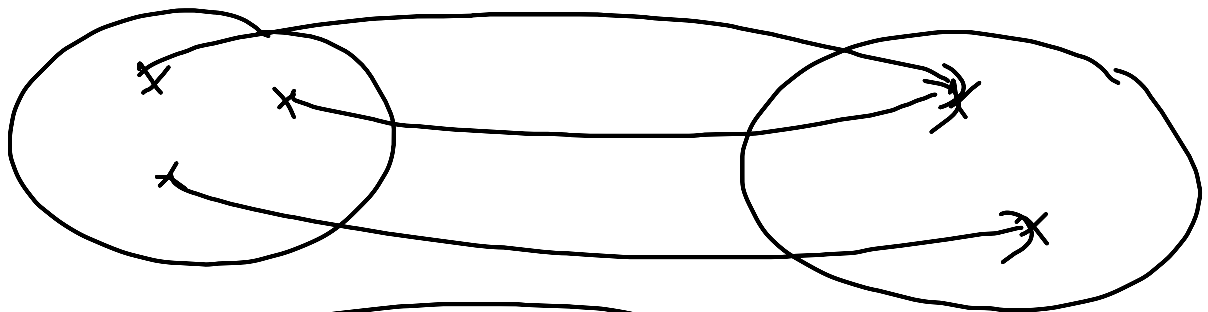


Bsp: a) $f(x) = x^2$ für $D = W = \mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> injektiv.

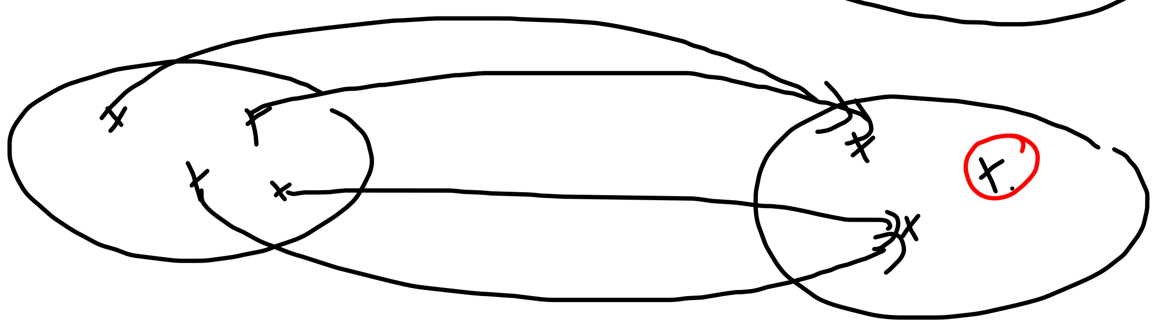
b) $f(x) = x^2$ für $D = \mathbb{R}_0^+$ $W = \mathbb{R}$ ist injektiv.

Def: Eine Abbildung $f: D \to W$ heißt <u>surjektiv</u> $:\Longleftrightarrow$

$$\forall z \in W \quad \exists\, x \in D \quad \text{mit} \quad f(x) = z .$$



surjektiv



nicht surjektiv.

Bsp: a) $f(x) = x^2$, $D = W = \mathbb{R}$ nicht surjektiv

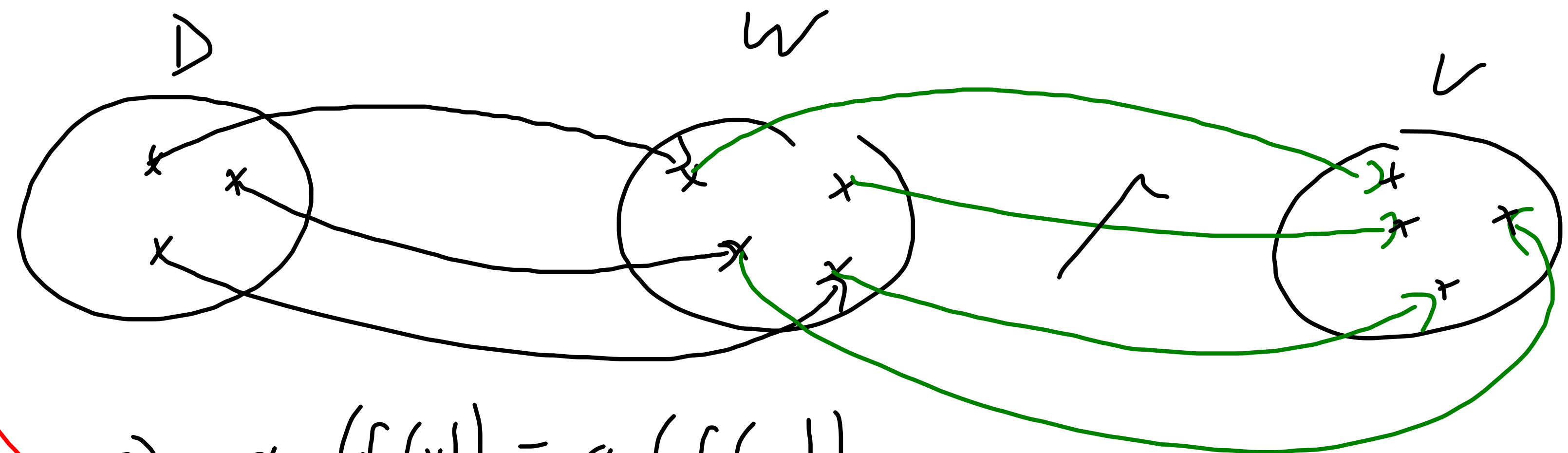
b) $f(x) = x^2$ $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^+$ surjektiv.

Definition: $f: D \to W$ wird <u>bijektiv</u> genannt $:\Longleftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv

Bsp: $f(x) = x^2$ für $D = W = \mathbb{R}_0^+$ ist bijektiv.

Sätzchen: Sei $f: D \to W$, $g: W \to V$ beide injektiv (surjektiv, bijektiv) dann ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv, bijektiv).

Beweis: "injektiv"



$$g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$, da g injektiv ist.

$\Rightarrow x = y$, da f injektiv ist. $\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv.

Satz: Seien D, W endliche Mengen, Falls $|D| > |W|$ dann gibt es keine injektive Abbildung von $D \to W$.

Falls $|D| < |W|$ gibt es keine surjektive Abbildung von $D \to W$.

Bijektive Abbildungen sind nur im Fall $|D| = |W|$ möglich..

Ersti - Programm

MORGEN: 19 Uhr Kneipentour
(Brunnen vor dem Rathaus)

27.04.22 : 10 Uhr Ersti-Frühstück N14
→ Geschirr

29.04.22 : 16 Uhr Stadtrally
(Treffpunkt: linker Brunnen neue Aula)
→ Shotglas

WhatsApp Gruppe
↳ Email an: events@math.uni-tuebingen.de

Instagram: mathefachschaft
→ Info's, Memes und mehr!

Mentorenprogramm → Anmelden bei URM

Buddy-Programm → ZDV

Math-Hour: Hilfe bei Übungsblätter, Discord oder Mo-Do 14-16 im N16