Satz (Entwicklungssatz): Jede Determinante lässt sich nach einer beliebigen Zeile j "entwickeln":

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \det(A_{ji}) \, (-1)^{i+j} .$$

Dabei ist A_{ji} die $n-1 \times n-1$ Matrix, die aus A durch Streichen der j. Zeile und i. Spalte endsteht.

Ebenso gilt wegen der Zeilen $\leftrightarrow$ Spalten-Symmetrie, dass man nach einer beliebigen Spalte entwickeln kann (i.te - Spalte)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \det(A_{ji}) \, (-1)^{i+j}$$

Bsp: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad i = 2. \text{ Spalte}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} \, a_{ji} \, \det(A_{ji}) =$$

$$\begin{aligned}
(j=1) \quad & = (-1) \; 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
(j=2) \quad & + (+1) \; 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
(j=3) \quad & + (-1)(-1) \; \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= 0 + 1 \cdot (-8) + 1(1-6) = -13$$

<u>Beweis</u>: 1) Normiertheit: z.z. $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \det A_{ji} (-1)^{i+j} = 1$

falls $A = E_n$

a_{ji} sind alle 0 außer $i=j$, dann ist $a_{ji} = 1$

$\sum_{i=1}^{n} \ldots = \underset{(a_{jj})}{1} \cdot \det E_{n-1} (-1)^{j+j} = 1$ ✓

2) Multilinearität (in den Spalten):

a) $A = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n)$ $\qquad \tilde{A} = (a_1 \ldots \lambda a_k \ldots a_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ji} \det \tilde{A}_{ji} (-1)^{i+j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \tilde{a}_{ji} \det \tilde{A}_{ji} (-1)^{i+j} + \tilde{a}_{jk} \det \tilde{A}_{jk} (-1)^{i+k}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ji}\, \lambda \det A_{ji} (-1)^{i+j} + \lambda a_{jk} \det A_{jk} (-1)^{i+k}$$

$$= \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \det A_{ji} (-1)^{i+j} \right)$$ ✓

b) geht analog wie a) $\quad \tilde{A} = (a_1 \ldots \cancel{a_\ell + b_\ell} \ldots a_n)$

z.z. "$\det \tilde{A} = \det A + \det B$" mit $B = (a_1 \ldots \cancel{b_\ell} \ldots a_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ji} \det \tilde{A}_{ji} (-1)^{i+j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^{n} \tilde{a}_{ji} \det \tilde{A}_{ji} (-1)^{i+j} + \tilde{a}_{j\ell} \det \tilde{A}_{j\ell} (-1)^{j+\ell} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^{n} \underbrace{a_{ji}}_{= b_{ji}} \left(\det A_{ji} + \det B_{ji} \right) (-1)^{i+j} + (a_{j\ell} + b_{j\ell}) \underbrace{\det \overset{(\sim)}{A}_{j\ell}}_{\det B_{j\ell}} (-1)^{j+\ell} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \det A_{ji} (-1)^{i+j} + \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \det B_{ji} (-1)^{i+j} \quad \checkmark$$

3) Alterniertheit (Spalten): o.B.d.A sei Spalte 1 = Spalte 2.

(die anderen Fälle beweist man analog)

$A = (a_1 a_1 \; a_3 \; a_4 \ldots a_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \det A_{ji} (-1)^{j+i} = \underbrace{a_{j1} \det A_{j1} (-1)^{j+1} + \underbrace{a_{j2}}_{=a_{j1}} \det \underbrace{A_{j2}}_{A_{j1}} (-1)^{j+2}}_{=0}$$

$$+ \sum_{i=3}^{n} a_{ji} \det A_{ji} (-1)^{j+i} = 0 + 0$$

In der ersten Zeile hatte man den selben Ausdruck mit wechselndem Vorzeichen, daher ist dieser Null.

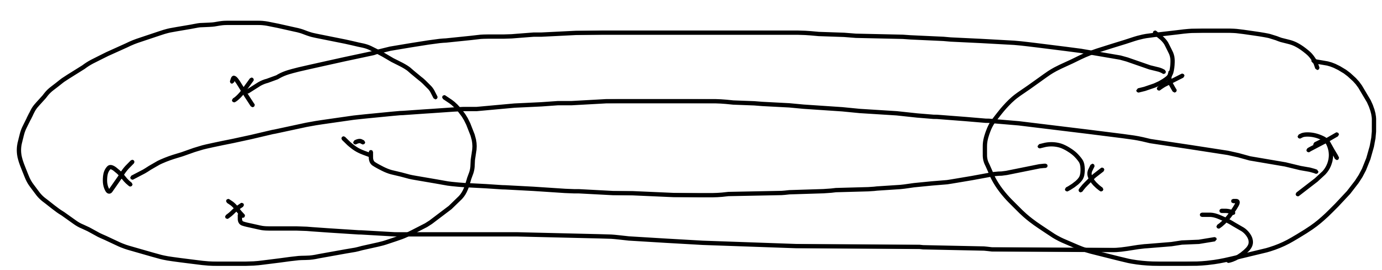
A_{ji} für $i \geq 3$ hat ebenfalls die beiden identischen Spalten 1 und 2 $\Rightarrow$ $\det A_{ji} = 0$ falls $i \geq 3$!

Einschub: Permutationen

<u>Definition</u>: Sei M eine Menge $|M| = n \in \mathbb{N}$. Jede bijektive Abbildung $p : M \to M$ nennt man <u>Permutation</u>.

<u>Satz</u>: Die Menge aller Permutationen einer endlichen Mengen ist eine Gruppe ($\circ$ ist dabei die Komposition von Abbildung)

<u>Beweis</u>: (Siehe oben) Identische Abbildung ist das neutrale Element
Umkehrabb. das Inverse.



Wir betrachten im Folgenden $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ $n \in \mathbb{N}$.

<u>Definition</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$, $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots n\}$ eine Permutation, dann nennt man $\operatorname{inv}(p) := \{ (i,j) \in \{1, \ldots n\}^2$ mit $i < j$ aber $p(i) > p(j) \}$ die Menge der Fehlstände von p.

Durch $\operatorname{sgn}(p) := (-1)^{|\operatorname{inv}(p)|}$ ist eine Art "Vorzeichen" auf der Menge der Permutationen definiert.

<u>Bsp</u>: $n = 5$ $\quad (p(1), p(2), \ldots p(5)) = \boxed{(\overset{\times}{3}, \overset{\times}{1}, 4, 5, 2)}$

$\operatorname{inv}(p) = \{(1,2); (1, 5); (3, 5); (4,5)\}$

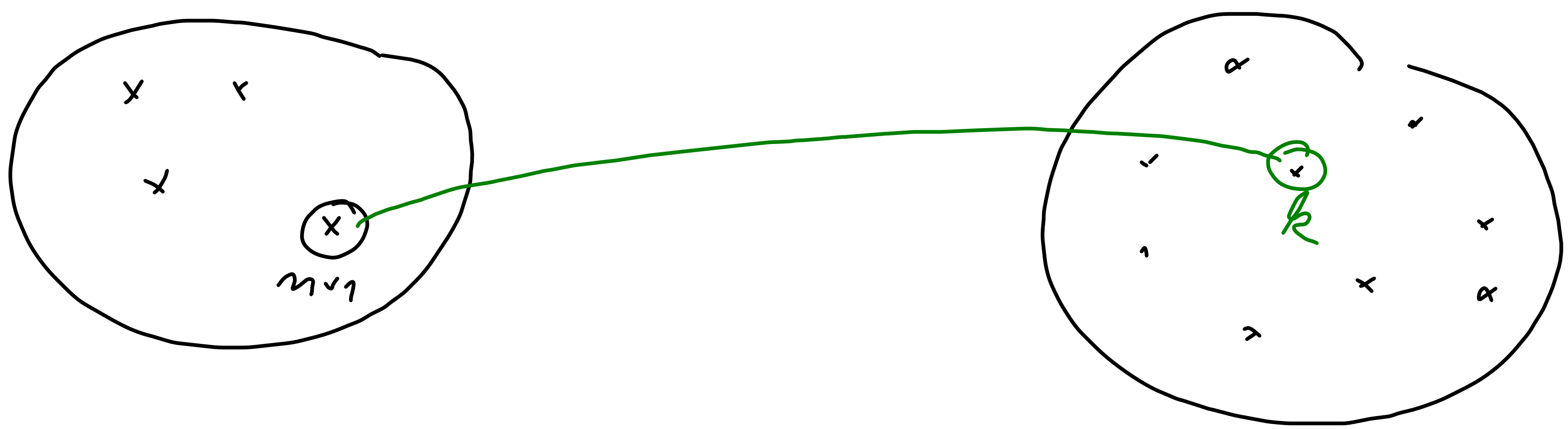
$|\operatorname{inv}(p)| = 4$, $\quad \operatorname{sgn}(p) = +1$.

<u>Def</u>: Sei $n \in \mathbb{N}$, die Permutation σ_{ij}, die die Elemente i und j vertauscht, aber alle anderen Elemente gleich lässt, nennt man Vertauschung von i und j. $(i, j \leq n)$

Satz: Jede Permutation lässt sich als "Produkt" von Vertauschungen schreiben.

Beweis: Für $n = 2$ ist der Satz trivial.

"$n \Rightarrow n+1$" Betrachte eine beliebige Permutation σ auf $\{1, \dots, n+1\}$.



Wir vertauschen zunächst $n+1$ und $k = \sigma(n+1)$.
Danach benutzen wir, dass wir die restlichen Elemente so durchtauschen können, dass die Permutation entsprechend σ ergibt.

Satz (Signum und Vertauschungen): Sei σ eine Permutation,

$$\sigma = \prod_{j=1}^{k} \sigma_j \qquad \text{wobei alle } \sigma_j \text{ Vertauschungen sind.}$$

Dann ist $\quad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k}$.

Korollar: Die Anzahl der Vertauschungen, aus denen man eine Permutation σ bilden kann, ist für gegebenes σ immer entweder gerade oder ungerade.