Beweis: Es gilt zu zeigen, dass das Multiplizieren mit einer Vertauschung σ_{ij} das Vorzeichen einer Permutation π ändert.

(Daraus folgt, dass das Signum einer Permutation immer -1 hoch der Zahl der benötigten Vertauschungen ist
$\Rightarrow$ Behauptung: # Vertauschungen ist bei gegebener Permutation immer entweder ungerade oder gerade)

Dazu zeigen wir: durch Vertauschen zweier Elemente ändert sich die Anzahl an Fehlständen um einen ungeraden Wert.

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(i), \dots, \pi(j), \dots \pi(n))$$

Vergleiche mit

$$(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(j), \dots, \pi(i), \dots \pi(n))$$

Wir betrachten systematisch die Änderung der Anzahl der Fehlstände.

1) "$i<j$" Falls $\pi(i) < \pi(j)$ erzeugen wir durch die Vertauschung einen Fehlstand.

Falls $\pi(i) > \pi(j)$ wird der Fehlstand vernichtet.

Dies führt zu einer ungeraden Änderung der Zahl der Fehlstände.

2) Betrachte eine Stelle $\underline{k} < i < j$.

$$k \quad \dots \quad i \quad \dots \quad j \quad \dots$$

Vorher $\quad \dots \pi(k) \dots \pi(i) \dots \pi(j) \dots \quad$ Fehlstand bei $k<i$

Nachher $\quad \dots \pi(k) \dots \pi(j) \dots \pi(i) \dots \quad$ wird zu Fehlstand bei $k<j$

Gleiches gilt, falls dort kein Fehlstand ist.

Analog $k<j$ Fehlstand wird zu Fehlstand bei $k<i$

" " "kein Fehlstand" " " "kein Fehlstand" " " ".

Die Zahl der Fehlstände mit Elementen $k<i$ bleibt also gleich

3) Selbes gilt für alle ℓ mit $i < j < \ell$.

4) Falls $i < \ell < j$ ist gilt:

Stelle..	i	ℓ	j
Vorher	$\dots\ \pi(i) \dots$	$\pi(\ell) \dots$	$\pi(j) \dots$
Nachher	$\dots\ \pi(j) \dots$	$\pi(\ell) \dots$	$\pi(i) \dots$

Fall a) $\pi(\ell) < \pi(i)$ und $\pi(\ell) < \pi(j)$

Vorher: Fehlstand $i < \ell$, kein Fehlstand $\ell < j$

Nachher: ebenso Anzahl Fehlstände bleibt

Fall b) Letzteres gilt auch für $\pi(\ell) > \pi(i)$, $\pi(\ell) > \pi(j)$

Fall c) $\pi(i) < \pi(\ell) < \pi(j)$ oder $\pi(i) > \pi(\ell) > \pi(j)$

Aus 0 Fehlständen werden 2, aus 2 Fehlständen werden 0

Insgesamt ändert sich die Zahl der Fehlstände um eine ungerade Zahl, daher wechselt sgn das Vorzeichen.

<u>Korollar</u> (Signum des Produkts): Gegeben zwei Permutationen σ, π auf $\{1, \dots n\}$. Dann gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \pi) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\pi).$$

<u>Beweis</u>: Schreibe σ und π als Produkt von Vertauschungen und zähl nach.

<u>Bemerkung</u>: Die Anzahl an Permutationen auf $\{1, \dots n\}$ ist $n!$

<u>Zurück zur Determinante</u>

Mit Hilfe der Permutationen lässt sich eine weitere Formel für die Determinante finden. Wir bezeichnen im folgenden mit S_n die Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots n\}$.

Satz:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$$

$$\left(\text{ebenso: } \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)\, j} \right)$$

Bsp $n=2$ und $n=3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = (1,2)$ $\quad \sigma_2 = (2,1)$

$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$

$$\det A = (+1) \cdot \underbrace{a_{11}}_{a} \cdot \underbrace{a_{22}}_{d} + (-1)\, \underbrace{a_{12}}_{b} \cdot \underbrace{a_{21}}_{c} = ad - bc$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = id$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_1) = +1$

$\sigma_2 = (1,3,2)$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)$

$\sigma_3 = (2,1,3)$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_3) = (-1)$

$\sigma_4 = (2,3,1)$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_4) = +1$

$\sigma_5 = (3,1,2)$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_5) = +1$

$\sigma_6 = (3,2,1)$ $\quad \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$

$$\det A = 1 \cdot \underset{2}{a_{11}}\, \overset{x}{\underset{1}{a_{22}}}\, a_{33} + (-1)\, a_{11}\, a_{23}\, a_{32} +$$

$$+ (-1)\, a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + 1\, a_{12}\, \overset{x}{a_{23}}\, a_{31} +$$

$$+ 1\, a_{13}\, \overset{x}{a_{21}}\, a_{32} + (-1)\, a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}\, \overset{x}{a_{22}}\, a_{33} + a_{12}\, \overset{x}{a_{23}}\, a_{31} + a_{13}\, \overset{x}{a_{21}}\, a_{32}$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} \quad \ldots$$

<u>Beweis</u>: 1) Normiertheit: Betrachte $\prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$. Falls nur für einen Index gilt, dass $\sigma(j) \neq j$, so ist das ganze Produkt 0. (falls $A = E_n$).

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e_{j\sigma(j)} = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) \cdot \prod_{j=1}^{n} e_{jj} = 1 \quad \checkmark$$

2) Alterniertheit in den Spalten, o. B. d. A $a_1 = a_2$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma(j)} = x$$

Wir vertauschen nun Spalte 1 und 2. Das ändert die Matrix nicht.

Dazu multiplizieren wir die Permutationen σ jeweils mit σ_{12}

$$x = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_{12} \circ \sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma_{12} \circ \sigma(j)} =$$

↑ da Spalte 1 = Spalte 2

$$= \sum_{\sigma \in S_n} - \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\,\sigma(j)} = -x \qquad \Rightarrow \quad x = 0$$

(außer $K = \{0, 1\}$)

3) Multilinearität in den Spalten. o.B.d.A Spalte 1.

Sei $A = (a_1, a_2 \dots, a_n)$ $\quad B = (b_1, a_2, \dots a_n)$

$C = (a_1 + \lambda b_1, a_2, a_3 \dots a_n)$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} c_{j\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} c_{\underbrace{\sigma^{-1}(j)}_{k}\, \underbrace{j}_{\sigma(k)}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(a_{\sigma^{-1}(1)1} + \lambda b_{\sigma^{-1}(1)} \right) \cdot \prod_{j=2}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \prod_{j=2}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j} + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{\sigma^{-1}(1)1} \prod_{j=2}^{n} b_{\sigma^{-1}(j)j}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)} + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} b_{j\sigma(j)} \quad \checkmark$$