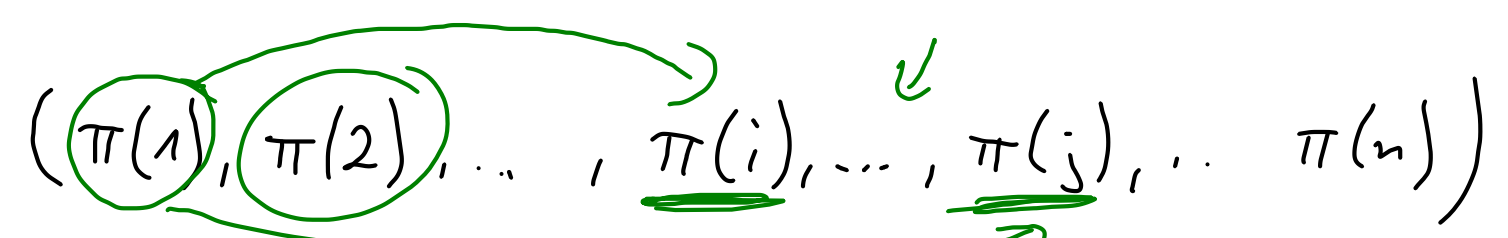


Beweis: Es gilt zu zeigen, dass das Multiplizieren mit einer
Vertauschung δ_{ij} das Vorzeichen einer Permutation π
ändert.

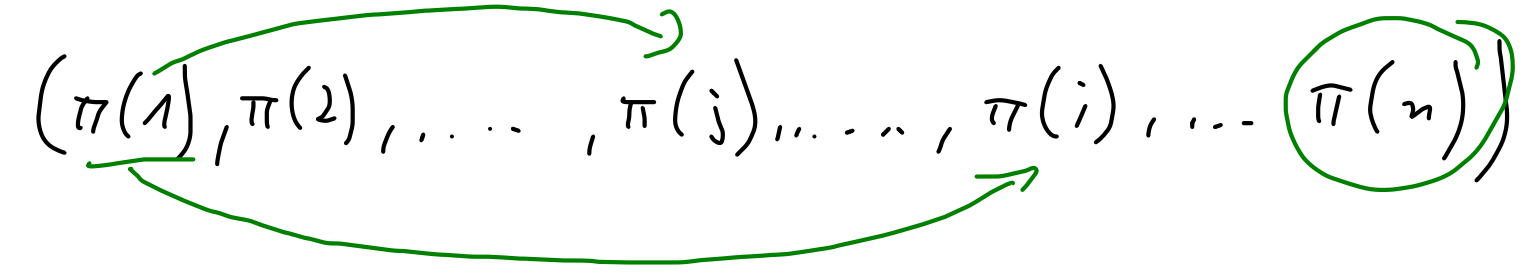
(Daraus folgt, dass das Signum einer Permutation immer
 -1 hoch der Zahl der benötigten Vertauschungen ist)

\Rightarrow Behauptung: # Vertauschungen ist bei gegebener Permutation
immer entweder ungerade oder gerade)

Dazu zeigen wir: durch Vertauschen zweier Elemente ändert
sich die Anzahl an Fehlständen um einen ungeraden Wert.



Vergleiche mit



Wir betrachten systematisch die Änderung der Anzahl der Fehlstände.

- 1.) " $i < j$ " Falls $\pi(i) < \pi(j)$ erzeugen wir durch die Vertauschung einen Fehlstand.
Falls $\pi(i) > \pi(j)$ wird der Fehlstand vernichtet.

Dies führt zu einer ungeraden Änderung der Zahl der Fehlstände.

- 2) Betrachte eine Stelle $k < i < j$.
- Vorher $\dots \pi(k) \dots \pi(i) \dots \pi(j) \dots$ Fehlstand bei $k < i$
- Nachher $\dots \pi(k) \dots \pi(j) \dots \pi(i) \dots$ wird zu Fehlstand bei $k < j$

Gleiches gilt, falls dort kein Fehlstand ist.

Analog $k < j$ Fehlstand wird zu Fehlstand bei $k < i$
" " "kein Fehlstand" " " "kein Fehlstand" " " "

Die Zahl der Fehlstände mit Elementen $k < i$ bleibt also gleich

3) Selbes gilt für alle l mit $i < j < l$.

4) Falls $i < l < j$ ist gilt:

Stelle... i l j
Vorher $\dots \pi(i) \dots \pi(l) \dots \pi(j) \dots$
Nachher $\dots \pi(j) \dots \pi(l) \dots \pi(i) \dots$

Fall a) $\pi(l) < \pi(i)$ und $\pi(l) < \pi(j)$

Vorher: Fehlstand $i < l$, kein Fehlstand $l < j$

Nachher: ebenso Anzahl Fehlstände bleibt

Fall b) Letzteres gilt auch für $\pi(l) > \pi(i)$, $\pi(l) > \pi(j)$

Fall c) $\pi(i) < \pi(l) < \pi(j)$ oder $\pi(i) > \pi(l) > \pi(j)$

Aus 0 Fehlständen werden 2, aus 2 Fehlständen werden 0

Insgesamt ändert sich die Zahl der Fehlstände um eine ungerade Zahl,
daher wechselt sgn das Vorzeichen.

Korollar (Signum des Produkts): Gegeben zwei Permutationen

σ, π auf $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\text{sgn}(\sigma \circ \pi) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\pi).$$

Beweis: Schreibe σ und π als Produkt von Vertauschungen und zähl nach.

Bemerkung: Die Anzahl an Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ ist $n!$

Zurück zur Determinante

Mit Hilfe der Permutationen lässt sich eine weitere Formel für die Determinante finden. Wir berechnen im folgenden mit S_n die Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$.

Satz 2 :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)}$$

$$\text{(ebenso : } \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j} \text{)}$$

Bsp $n=2$ und $n=3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = (1, 2)$$

$$\sigma_2 = (2, 1)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1$$

$$\det A = (+1) \cdot \underset{a}{a_{11}} \cdot \underset{d}{a_{22}} + (-1) \cdot \underset{b}{a_{12}} \cdot \underset{c}{a_{21}} = ad - bc$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \text{id} \quad \operatorname{sgn}(\sigma_1) = +1$$

$$\sigma_2 = (1, 3, 2)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)$$

$$\sigma_3 = (2, 1, 3)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_3) = (-1)$$

$$\sigma_4 = (2, 3, 1)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_4) = +1$$

$$\sigma_5 = (3, 1, 2)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_5) = +1$$

$$\sigma_6 = (3, 2, 1)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1$$

$$\det A = 1 \cdot a_{11} \overset{x}{a_{22}} \overset{1}{a_{33}} + (-1) a_{11} a_{23} a_{32} +$$

$$+ (-1) a_{12} a_{21} a_{33} + 1 a_{12} \overset{x}{a_{23}} \overset{1}{a_{31}} +$$

$$+ 1 a_{13} \overset{x}{a_{21}} a_{32} + (-1) a_{13} a_{22} a_{31}$$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \overset{x}{a_{22}} \overset{1}{a_{33}} + a_{12} \overset{x}{a_{23}} \overset{1}{a_{31}} + a_{13} \overset{x}{a_{21}} \overset{1}{a_{32}} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \dots$

Beweis: 1) Normiertheit: Betrachte $\prod_{j=1}^n a_{j d(j)}$. Falls nur für einen Index gilt, dass $d(j) \neq j$, so ist das ganze Produkt 0. (falls $A = E_n$).

$$\Rightarrow \sum_{d \in S_n} \text{sgn}(d) \prod_{j=1}^n e_{j d(j)} = \text{sgn}(id) \cdot \prod_{j=1}^n e_{jj} = 1 \quad \checkmark$$

2) Alterniertheit in den Spalten, o. B. d. A $a_1 = a_2$

$$A = (a_1 \ a_1 \ a_3 \ \dots \ a_n)$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_j \sigma(j) = x$$

Wir vertauschen nun Spalte 1 und 2. Das ändert die Matrix nicht.

Dazu multiplizieren wir die Permutationen σ jeweils mit σ_{12}

$$x = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_j \sigma(j) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma_{12} \circ \sigma) \prod_{j=1}^n a_j \sigma_{12} \circ \sigma(j) =$$

↑ da Spalte 1 = Spalte 2

$$= \sum_{\sigma \in S_n} - \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_j \sigma(j) = -x$$

$$\Rightarrow x = 0$$

(außer $K = \{0, 1\}$)

3) Multilinearität in den Spalten, o. B. d. A Spalte 1.

$$\text{Sei } A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad B = (b_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$C = (a_1 + \lambda b_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n c_{j\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n c_{\underbrace{\sigma^{-1}(j)}_k \underbrace{j}_{\sigma(k)}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(a_{\sigma^{-1}(1)1} + \lambda b_{\sigma^{-1}(1)1} \right) \cdot \prod_{j=2}^n a_{\sigma^{-1}(j)j} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \prod_{j=2}^n a_{\sigma^{-1}(j)j} + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma^{-1}(1)1} \prod_{j=2}^n a_{\sigma^{-1}(j)j}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)} + \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n b_{j\sigma(j)} \quad \checkmark$$