7. Darstellung von linearen Abbildung

Im folgenden betrachten wir nur endlichdimensionale Vektorräume

<u>Satz</u>: Sei V ein (endlichdim) K-) Vektorraum, B sei Basis von V.
Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ (W irgendein K-Vektorraum) ist über die Bilder aller Basisvektoren eindeutig bestimmt.
Anders gesprochen: Kennt man $f(b_i)$ für $i \in \{1, \dots n\}$, $n = \dim V$ dann kennt man die ganze lineare Abbildung f.

<u>Beweis</u>: Sei die Basis $B = \{b_1, \dots b_n\}$ eines VR V gegeben, ebenso $f(b_1), \dots, f(b_n)$.
Dann gilt wegen Linearität für ein beliebiges

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \quad : \quad f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, f(b_j).$$

<u>Konsequenz</u>: Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ können wir bei gegebenen Basen $\mathcal{B}$ von V, $\mathcal{A}$ von W in eindeutiger Weise durch ein Zahlenschema angeben:

$$\begin{pmatrix} f(b_1)_{\mathcal{A}} & f(b_2)_{\mathcal{A}} & \dots & f(b_n)_{\mathcal{A}} \end{pmatrix}$$

<u>Zur Notation</u>: z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}$ hatten wir als Schreibweise für $v = 1 \cdot a_1 + 2\, a_2$ benutzt.

Hier: $v_{\mathcal{A}}$ nennen wir den entsprechenden Koordinatenvektor.

$v_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel: Sei V der VR von Polynomen höchstens vom Grad 2, W " " " " " vom Grad 1

f bilde ein Polynom auf seine Ableitung ab.

$$B = \{1+x,\ 1-x,\ x^2+2x\} \qquad A = \{1,\ x+2\}.$$

Wir suchen $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$ in der Basis A dargestellt.

$$f(b_1) = (1+x)' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynom.}}}{1} \qquad (f(b_1))_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b_2) = (1-x)' = -1 \qquad (f(b_2))_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(b_3) = (x^2+2x)' = 2x+2 \qquad (f(b_3))_A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left(=: M_A^B(f) \right)$$

Definition: Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Eine zweifach indizierte Familie von Körperelementen $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots,m}} \subset K$ nennt man $n \times m$ Matrix.

(Abbildung von $\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots m\} \to K$)

Bem: Aus praktischen Gründen (siehe unten) geben wir Matrizen als rechteckiges Schema an:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

n gibt also die Anzahl der Zeilen, m die Anzahl der Spalten an. Koordinatenvektoren weiterhin als Spalten.

Definition: Die $m \times n$ Matrix, deren Spalten die Bilder der Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$ einer linearen Abbildung $f: V \to W$ in einer Basis $\mathcal{A}$ geschrieben sind, nennt man <u>darstellende Matrix</u> von f bzgl. der Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots b_n\}$ und $\mathcal{A}$.

Schreibweise: $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f)$

Start $\to \mathcal{B}$

Ziel $\to \mathcal{A}$

Bemerkung: Der Satz zu Beginn des Kapitels zeigt, dass es eine natürliche Bijektion zwischen der Menge der linearen Abbildungen $f: V \to W$ und der $m \times n$ - Matrizen gibt.

Voraussetzung: Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{A}$ von W sind gegeben, mit $m = \dim W$ und $n = \dim V$.

<u>Definition</u>: Wir definieren ein Produkt (eine Verknüpf.) der Menge der $m \times n$ - Matrizen mit Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^n$: über den "Zeile mal Spalte" formalismus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} v_2 \ldots a_{1n} v_n \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 \ldots \\ \vdots \\ a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 - \ldots a_{mn} v_n \end{pmatrix}$$

Dieses Produkt führt uns in den $\mathbb{R}^m$. (bzw K^n und K^m).

<u>Satz</u>: Es gilt: $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot v_{\mathcal{B}} = f(v)_{\mathcal{A}}$

<u>Beweis</u>: Sei $v = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j \in V$. Dann ist:

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(b_j) \qquad f(v)_{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \underbrace{f(b_j)_{\mathcal{A}}}_{\text{j.te Spalte der Matrix.}}$$

Beispiel: Zurück zu obigen Beispiel:

$$B = \{1+x,\ 1-x,\ x^2+2x\} \qquad A = \{1,\ x+2\}$$

$$M_A^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sei $v = x^2 \Rightarrow f(v) = 2x$

$$f(v)_A = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$v_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Definition: Sei A eine $m \times n$ Matrix, B eine $n \times r$ Matrix. Dann definieren wir das Produkt $A \cdot B$ über den „Zeile mal Spalte" Formalismus: $A = (a_{ij})$ $\quad B = (b_{ij})$

$$C = A \cdot B = (c_{ij})$$

$$\boxed{c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

C ist eine $m \times r$ Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nj} & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & j \\ & \downarrow \\ i \to & \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Satz: $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(g \circ f)$

Beweis: $g \circ f$ ist lineare Abbildung und dadurch über die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Sei b_j der j. te Basisvektor von V

$f: V \to W \quad g: W \to U$.

Was ist $g \circ f(b_j)_A$?

z.z.: Dies ist genau die j. te Spalte von

$$\underbrace{M_A^C(g)}_{:= A} \underbrace{M_C^B(f)}_{:= B} .$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mj} & b_{mr} \end{pmatrix}$$

Die j.te Spalte dieses Produktes ist also

$$\begin{pmatrix} a_{11} b_{1j} + a_{12} b_{2j} \cdots a_{1m} b_{mj} \\ a_{21} b_{1j} + a_{22} b_{2j} \cdots a_{2m} b_{mj} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots \\ \\ \cdots\cdots \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}}_{f(b_j)} =$$

$$M_A^C(g) \cdot f(b_j)_C \overset{\text{Satz}}{=} g(f(b_j))_A \quad \square .$$