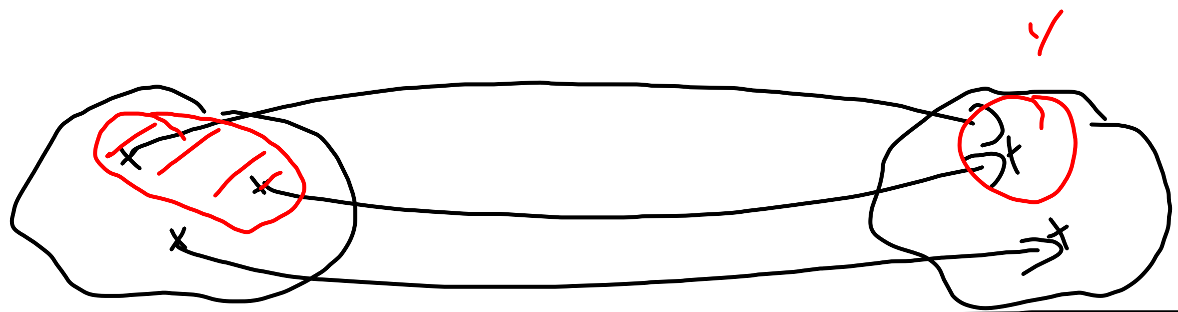
Satz: $\infty > |D| > |W|$ gibt es kein $f: D \to W$ injektiv.

...

Beweis:



WA: $f: D \to W$ injektiv obwohl $|D| > |W|$.

Für jedes $y \in W$ gilt $\underbrace{\left|f^{-1}(\overset{A}{\{y\}})\right|}_{}$ ≤ 1 da f injektiv.

$$:= \{x \in D : f(x) \in \overset{A}{\{y\}}\}$$

$$f^{-1}(W) = \{x \in D : f(x) \in W\} = D$$

$$|D| = |f^{-1}(W)| = \left|\bigcup_{y \in W} f^{-1}(\{y\})\right| \leq \sum_{y \in W} \left|f^{-1}(\{y\})\right| \leq \sum_{y \in W} 1 = |W|$$

↯

$\square$

2. Verknüpfungen, Gruppen, Körper

<u>Def</u>: Seien A, B, C Mengen. Eine Abbildung von $A \times B$ nach C nennt man (zweistellige) Verknüpfung.
(Notation: $a \oplus b = c$ statt $f(a,b) = c$)
Falls $A = B = C$ nennt man "$\oplus$" eine innere Verknüpfung.

<u>Bsp</u>: a) Addition, Multiplikation, das Potenzieren in $\mathbb{N}$ sind innere Verkn.
b) Die Komposition von Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist eine innere Verknü.
⋮

<u>Def.</u>: Sei M eine Menge, $\oplus : M \times M \to M$. Ein Element $n_L \in M$ heißt <u>linksneutrales Element</u>, $:\Leftrightarrow$ $n_L \oplus a = a \quad \forall a \in M$,
n_R ... rechtsneutrales Element $:\Leftrightarrow$ $a + n_R = a \quad \forall a \in M$.
Ein Element n heißt neutrales Element, wenn es sowohl linksneutral als auch rechtsneutral ist.

Bsp: Sei $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ geg. durch $a \oplus b = a^b$.

Dann ist 1 rechtsneutrales $(a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{N})$

aber kein linksneutrales $(1^a = 1 \neq a$ falls $a \neq 1)$

Def: M, $\oplus$ wie oben, Sei n_L linksneutrales Element, $a \in M$.

Falls $\hat{a} \oplus a = n_L$ so nennt man a^{-1} linksinverses von a,

etc.

Def: Eine Menge G zusammen mit einer inneren Verknüpfung $\oplus$

heißt Gruppe $:\Leftrightarrow$

a) $\exists$ ein linksneutrales Element $n_L \in G$.

b) $\forall a \in G \; \exists$ linksinverses Element.

c) Es gilt das Assoziativgesetz: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a,b,c \in G$.

Falls zusätzlich das Kommutativgesetz gilt $(a \oplus b = b \oplus a)$, so nennt

man G "abelsche" Gruppe oder kommutative Gruppe.

Bsp: a) $(\mathbb{N}, +)$ sind keine Gruppe, es fehlt das neutrale

b) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe. $n_L = 0$, $a^{-1} = -a$.

c) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, es fehlen die Inversen. (außer für ± 1).

d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist Gruppe.

Satz: Für jede Gruppe $(G, \oplus)$ gelten folgende Eigenschaften:

a) n_L ist auch rechtsneutral, dadurch ein neutrales Element.

b) jedes linksinverses ist auch rechtsinverses.

c) Das neutrale Element ist eindeutig, ebenso die Inversen.

d) $x \oplus a = b$ hat die eindeutige Lösung $x = b \oplus a^{-1}$

(a^{-1} ist hier das Inverse von a)

e) $n_L^{-1} = n_L$, $(a^{-1})^{-1} = a$

f) $(a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$

Beweis: als erstes zeigen wir, dass $\boxed{a \oplus a^{-1} = n_L}$.

Definiere dazu: $c = (a \oplus a^{-1})^{-1}$

(a^{-1} ist hier das linksinverse von a, d.h. $a^{-1} \oplus a = n_L$)

d.h. $n_L = c \oplus (a \oplus a^{-1}) = c \oplus a \oplus a^{-1} =$

$= c \oplus a \oplus n_L \oplus a^{-1} = c \oplus a \oplus a^{-1} \oplus a \oplus a^{-1} =$

$= n_L \oplus a \oplus a^{-1} = a \oplus a^{-1}$ $\square$

$a^{-1} = n_L \oplus a^{-1}$

Nun zeigen wir, dass $a \oplus n_L = a \quad \forall a \in G$

$a \oplus n_L = a \oplus (a^{-1} \oplus a) \overset{\text{Formel}}{=} n_L \oplus a = a$

n_L ist linksneutral.

Wir haben also a) und b).

c) Seien n, m zwei neutrale Elemente.

$m = n \oplus m = n$

Sei n_L linksneutral m_L ein weiteres linksneutrales,

$m_L = m_L \oplus n_L = n_L$

siehe oben

$\boxed{\text{Sei } m_R \text{ rechtsneutrales } m_R = n_L \oplus m_R = n_L}$

Sei $a \in G$, a^{-1} das Inverse von a,

sei außerdem $b \oplus a = n_L$

$$b \underset{a)}{=} b \oplus n_L = b \oplus (a \oplus a^{-1}) = (b \oplus a) \oplus a^{-1} = n_L \oplus a^{-1} = a^{-1}$$

Ähnlich liefert $a \oplus b = n_L$ dass $b = a^{-1}$

d) $x \oplus a = b$ Beh: $x = b \oplus a^{-1}$ ist eind. Lösung.

$b \oplus a^{-1} \oplus a = b \oplus n_L = b$ ✓ Dies ist also eine Lösung.

Sei $y \oplus a = b$

$$y = y \oplus n_L = y \oplus a \oplus a^{-1} = b \oplus a^{-1}.$$

e) Offensichtlich ist $n_L \oplus n_L = n_L \Rightarrow n_L = n_L^{-1}$

Außerdem: $(a^{-1})^{-1} \oplus a^{-1} = n_L$

$$(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} \oplus n_L = (a^{-1})^{-1} \oplus a^{-1} \oplus a = n_L \oplus a = a$$

f) $(a\oplus b)^{-1} = (a\oplus b)^{-1}\oplus n_L = (a\oplus b)^{-1}\oplus a \oplus a^{-1} =$

$= (a\oplus b)^{-1}\oplus a \oplus n_L \oplus a^{-1} = (a\oplus b)^{-1}\oplus (a\oplus b)\oplus b^{-1}\oplus a^{-1} =$

$= n_L \oplus b^{-1}\oplus a^{-1} = b^{-1}\oplus a^{-1}$

Körper