<u>Bsp</u>: Basis $B = \{1, x, x^2\}$ $\qquad f$: Ableitung

$f: V \to V$

$V = \operatorname{span} B$.

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f^2) = M_B^B(f) \cdot M_B^B(f)$$ (folgt aus Satz)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Probe}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Definition: Auf der Menge der $m \times n$ - Matrizen definieren wir eine Addition und Multiplikation mit Skalaren wie folgt:

$$A + B = C \quad \text{über} \quad a_{ij} + b_{ij} =: c_{ij}$$

$$\lambda \cdot A = D \quad \text{über} \quad \lambda a_{ij} =: d_{ij}$$

Satz: $\left(M(m \times n), +, \cdot \right)$ ist ein K - Vektorraum der Dimension $n \cdot m$.

Beweis: Neutrales ist offensichtlich die Matrix $n_{ij} = 0 \quad \forall\, i,j$.

Inverse ist $a_{ij} = - a_{ij} \quad \forall\, i,j$

Rechenregeln (A, K, D - Gesetze) folgen komponentenweise aus den Rechenregeln im Körper.

Korollar: Der Vektorraum der linearen Abbildungen von $V \to W$ ist bei gegebenen Basen isomorph zum VR der $m \times n$ - Matrizen: $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ ist der entsprechende Isomorphismus.

<u>Beweis</u>: "Verträglichkeit mit +"

z.z.: $M_A^B(f+g) = M_A^B(f) + M_A^B(g)$

a) $f(v+w) = f(v) + f(w)$

$M_A^B(f) = \begin{pmatrix} f(b_1) & f(b_2) & \dots \end{pmatrix}$ $\qquad M_A^B(g) = \begin{pmatrix} g(b_1) & \dots \end{pmatrix}$

$M_A^B(f) + M_A^B(g) = \begin{pmatrix} f(b_1)+g(b_1) & f(b_2)+g(b_2) & \dots \end{pmatrix} = M_A^B(f+g)$

Bild von b_1 unter $f+g$.

Verträglichkeit mit $\cdot$ ebenso.

Besondere Matrizen: a) $n \times n$ - Einheitsmatrix:

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathbb{E} = M_B^B(id_V)$ für alle Basen B von V.

b) Für unterschiedliche Basen $\mathcal{A}, B$ eines VR V nennt man die Matrix $M_{\mathcal{A}}^B(id)$ auch Basiswechsel von B nach $\mathcal{A}$.
Dies ist in der Regel nicht die Einheitsmatrix.

c) Eine Matrix heisst symmetrisch, falls $a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$
Eine Matrix heisst hermitesch, falls $a_{ij} = a_{ji}^* \ \forall i,j$
(hier betrachten wir den Körper $\mathbb{C}$, $*$ steht für komplexe Konj.)

d) Gegeben ein Matrix $A = (a_{ij})$ dann nennt man $A^T = (a_{ji})$ die transponierte Matrix von A. (hier auch $m \neq n$)

Bemerkung: $M^B_A(id)\, M^A_B(id) = M^A_A(id) = \mathbb{E}$

Def: Eine $\overbrace{\quad}^{n\times n}$ Matrix A für die eine $n\times n$-Matrix A^{-1} gefunden werden kann, so dass $A A^{-1} = \mathbb{E}$ nennt man invertierbar. A^{-1} nennt man die Inverse von A.

Bem: Die Menge der invertierbaren $n\times n$ Matrizen bildet eine Gruppe. Es gilt also auch $A^{-1}A = \mathbb{E}$.

Bemerkung: Die Begriffe Bild, Kern, Rang können für Matrizen direkt übernommen werden, ebenso deren Eigenschaften:

$\ker(A)$ ist die Menge aller Elemente des $\mathbb{R}^n$, die auf 0 abgebildet werden, $\mathrm{im}(A)$ ist die lineare Hülle der Spalten von A, der rang von A die Dimension davon.

Es gilt $A \in M(n\times n)$ invertierbar $\iff \ker A = \{0\}$

$\iff \dim(\mathrm{im}\, A) = n$.

8 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten eine Gleichung der Form

$$A \cdot x = b$$

für $A \in M(m \times n)$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben.

Wir suchen die Lösungsmenge, d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$, für die die Gleichung aufgeht.

$$A \cdot x = b \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{ll} \mathrm{I}: & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \ldots = b_1 \\ \mathrm{II}: & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \ldots = b_2 \\ & \vdots \end{array}$$

<u>Frage</u>: Hat das Gleichungssystem Lösungen?
Wie viele? Wie sehen sie aus?

<u>Satz</u>: Die Differenz zweier Lösungen (falls solche existieren) liegt immer im Kern von A.

Alle Lösungen x können also als Summe einer speziellen Lösung x_0 plus ein Element des Kernes von A geschrieben werden. Der Lösungsraum ist also ein affiner Raum:

$$\underbrace{x_0 + \underbrace{\ker A}_{\text{UVR}}}_{\text{affiner Raum}} =: \{ x : \exists v \in \ker A \text{ so dass } x = x_0 + v \}$$

<u>Beweis</u>: Es gelte $Ax = b$ und $Ay = b$

$\Rightarrow Ax - Ay = b - b = 0 \qquad A(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in \ker$

Bemerkung: Falls $\ker A = \{0\}$ ist die Lösung also (falls existent) eindeutig.

Satz: Sei B eine $m \times m$ Matrix. Dann gilt:
Alle Lösungen von $A x = b$ (A, b wie oben) sind auch Lösungen von $(BA)x = Bb$.
Falls B invertierbar ist, so sind beide Lösungsmengen identisch.

Beweis: Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$
sei $\mathcal{M}$ die Lösungsmenge von $(BA)x = Bb$

z.z. $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ sowie $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ falls B invertierbar.

Falls $Ax = b$ folgt direkt aus der Wohldefiniertheit der Abbildung B, dass auch $B(Ax) = B(b)$. Der Rest folgt aus dem Assoziativgesetz. $\Rightarrow \mathcal{L} \subset \mathcal{M}$

Falls B invertierbar ist benutzen wir selbes Argument $(BA)x = Bb$ und

$$B^{-1}(BA)x = B^{-1}(Bb) \Leftrightarrow Ax = b$$

$\Rightarrow \mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. da auch $\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{M}$.

Die Vorgehensweise der Lösungssuche wird so sein, dass wir das Gleichungssystem durch Multiplikation mit geeigneten invertierbaren Matrizen (unter Beibehaltung der Lösungsmenge) von Links verschönern bis wir die Lösung einfach ausrechnen können.

Dazu definieren wir Matrizen, die in folgender Weise auf eine Matrix von links multipliziert werden.:

i) Multiplikation einer Zeile j mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$

ii) Addition der j. Zeile zur i. Zeile.

iii) Vertauschen von Zeile i und j

iv) Addition des λ-Fachen von Zeile i zu Zeile j.

Wir zeigen nun, dass all diese Operationen als Multiplikation von entsprechenden Matrizen von links geschrieben werden können dadurch die Lösungsmenge nicht verändern!

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ Multipliziere von links mit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist inverse dazu} \right)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ hat identische Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} \lambda 1 & \lambda \cdot 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$