$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

<u>Satz</u>: $\exists$ ONB.

<u>Beweis</u>: $B = \{ b_1, \dots b_n \}$ $\qquad$ $ONB = \{ v_1, \dots v_n \}$

$$v_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|_2} \Rightarrow \langle v_1, v_1 \rangle = \left\langle \frac{b_1}{\|b_1\|_2}, \frac{b_1}{\|b_1\|_2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|b_1\|_2^2} \langle b_1, b_1 \rangle = \frac{1}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot \langle b_1, b_1 \rangle = 1 .$$

$$\tilde{v}_2 := b_2 - \langle v_1, b_2 \rangle v_1$$

$$\langle \tilde{v}_2, v_1 \rangle = \langle b_2 - \langle v_1, b_2 \rangle v_1 , v_1 \rangle =$$

$$= \langle b_2, v_1 \rangle - \overline{\langle v_1, b_2 \rangle} \cdot \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=1} = 0$$

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|_2} \qquad \left( \tilde{v}_2 \neq 0 , \text{ da } \tilde{v}_2 = 0 \Rightarrow b_2 - \langle v_1, b_2 \rangle \frac{b_1}{\|b_1\|_2} = 0 \ \text{↯ zu } b_1, b_2 \text{ l.u} \right)$$

$$\tilde{v}_3 = \underline{b_3} - \langle v_2, b_3 \rangle v_2 - \langle v_1, b_3 \rangle v_1$$

$$\langle \tilde{v}_3, v_2 \rangle = \langle b_3 - \langle v_2, b_3 \rangle v_2 - \langle v_1, b_3 \rangle v_1 , v_2 \rangle =$$

$$= \langle b_3, v_2 \rangle - \overline{\langle v_2, b_3 \rangle} \underbrace{\langle v_2, v_2 \rangle}_{=1} - \overline{\langle v_1, b_3 \rangle} \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{=0} = 0$$

ebenso $\langle \tilde{v}_3, v_1 \rangle = 0$

$$v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|_2} \qquad (\tilde{v}_3 \neq 0 \quad \text{wie oben})$$

usw.

$$\tilde{v}_k = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \leftarrow k.\ \text{Stelle} \qquad v_k = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ \lambda_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_k \neq 0$$

$$\det(v_1, v_2 \ldots v_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 2 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0$$

$\Rightarrow (v_1, v_2, \ldots v_n)$ ist linear unabhängig $\Rightarrow$ Basiseigenschaft.

Satz: In der ONB dargestellt ist das Skalarprodukt gleich dem Standardskalarprodukt, d.h.,

Sei $V$ ein endlichdim. $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) Vektorraum, $\langle \, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ein Skalarprodukt, ONB eine entsprechende Orthonormalbasis. Dann gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \, w_j \, , \quad \text{wobei} \quad v_{ONB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad w_{ONB} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

BSP: Sei $V$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2.

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \, g(x) \, dx .$$

$B = \{ 1, x, x^2 \}$

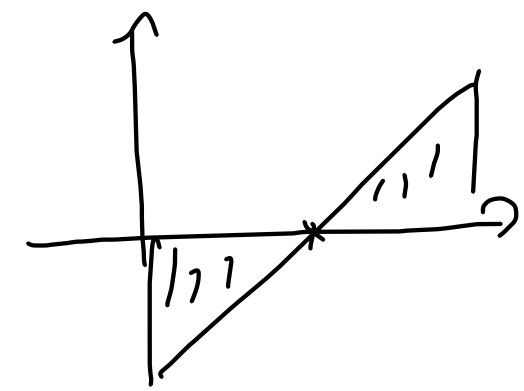
$b_1 = 1 \qquad b_2 = x \qquad b_3 = x^2$

$\langle b_1, b_1 \rangle = 1 \qquad v_1 = b_1$

$$\tilde{v}_2 = b_2 - \langle v_1, b_2 \rangle v_1$$

$$\tilde{v}_2 = b_2 - \langle v_1, b_2 \rangle v_1 = x - \int_0^1 1 \cdot x \, dx \cdot 1 =$$

$$= x - \frac{1}{2}$$



$$\langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_2 \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$v_2 = \sqrt{12} \cdot x - \sqrt{3}$$

$$\tilde{v}_3 = b_3 - \langle v_2, b_3 \rangle v_2 - \langle v_1, b_3 \rangle v_1 = \ldots$$

$$v_3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

**Definition**: Eine $n \times n$-Matrix $A$ heißt positiv definit, falls für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\underbrace{v^t A v}_{\in \mathbb{R}} \geq 0 \qquad v^t A v = 0 \iff v = 0.$$

**Satz**: Sei $V$ ein endlich-d. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ - VR, $\langle \, , \, \rangle : V^2 \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ein Skalarprod.

Dann gibt es eine positive definite, symmetrische (hermitesche) Matrix $A$ so dass $\langle v, w \rangle = v^t A w$.

Umgekehrt ist für jede positiv definite symmetrische (hermitesche) Matrix $A$ über $\langle v, w \rangle := v^t A w$ ein Skalarprodukt definiert.

($A$ ist symmetrisch falls $a_{ij} = a_{ji}$, hermitesch $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$)

Beweis: „Teil b": Sei $A$ pos. def. hermitesche $n\times n$-Matrix.

$\langle v, w\rangle := v^t A w$.

1) $\langle v, v\rangle = v^t A v \geq 0$, da $A$ pos. def.

$= 0 \iff v = 0$ (da pos. def) ✓

2) $\langle v, w+\lambda z\rangle = v^t A (w+\lambda z) = v^t A w + \lambda v^t A z$ ✓

3) $\langle w, v\rangle = \underbrace{w^t A v}_{\mathbb{C}} = \overline{(w^t A v)^t} = \overline{v^t A^t w} = \overline{v^t A w} = \overline{\langle v, w\rangle}$

($A^t$ ist die Matrix mit Einträgen $\overline{a_{ji}}$, d.h. Zeilen- und Spaltenindex wurden vertauscht, die Werte zus. komplex konj.)

"Teil a": Sei nun $\langle\, ,\, \rangle : V^2 \to \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt.

z.z. $\exists A$ pos. def und hermitesch mit

$$\langle v, w \rangle = v^t A w .$$

Wir betrachten zunächst $\langle e_i, e_j \rangle$ für die kanonischen Einheitsvektoren $e_i = (0\,0 \ldots 1 \ldots 0)$ und $e_j = \ldots$

$$\uparrow$$

i-te Stelle

Aus den entsprechenden Werten $a_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ lässt sich das gesamte Skalarprodukt bestimmen!

$$\langle v, w \rangle = \sum_{\substack{j=1\\ i=1}}^{n} \overline{\lambda_j}\, w_i \langle e_j, e_i \rangle \qquad \text{falls } v = \sum \lambda_j e_j$$

$$w = \sum w_j e_j$$

Es reicht also zu zeigen, dass es ein A mit den entspr. Eigenschaften gibt, so dass $\langle e_i, e_j \rangle = e_i^t A e_j = a_{ij}$

Die Definition oben: $a_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ liefert also diese Formel.

Hat A def

Hat $A$ def. durch $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ die geforderten Eigenschaften ?

1) $v^t A v = \langle v, v \rangle \geq 0$ und $= 0 \iff v = 0$

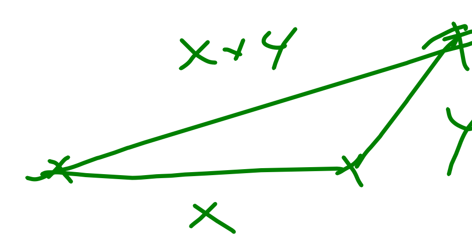
(ähnlich wie oben)

2) ist $A^t = A$ ? d.h. $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$

$$a_{ji} = \langle e_j, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ij}} \quad \checkmark$$

<u>Satz</u>: Für alle Skalarprodukte und den zugehörigen Längenbegriff

$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ gelten




a) Die Ungleichung von Cauchy und Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

b) Die Dreiecksungleichung: $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$