Vergleich Matrixnotation

Bsp: $A \in M(2 \times 2)$, $K = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Äquivalenzumformungen z. B. Multipl. Zeile 1 mit λ

"$\Downarrow$"

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Allgemein $M \cdot A \, x = M \cdot b$

"$\Downarrow$"

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dots$$

Falls M invertierbar ist bleibt die Lösungsmenge erhalten (Satz, siehe oben)

Gleichungssystem

$\mathrm{I}: \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$

$\mathrm{II}: \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$

"$\Downarrow$"

$\mathrm{I}': \quad \lambda a_{11} x_1 + \lambda a_{12} x_2 = \lambda b_1$

$\mathrm{II}: \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$

"$\Downarrow$" $\quad \mathrm{I}'$ mal $\frac{1}{\lambda}$ falls $\lambda \neq 0$

$\mathrm{I}'': \quad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$

$\mathrm{II}: \quad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$

Falls die Äquivalenzumformung reversibel ist bleibt die Lösungsmenge unverändert.

Zurück zu den Transformation

$\boxed{\text{i)} \quad \text{ii)}}$ $\boxed{\text{iii)} \quad \text{iv)}}$

Matrixnotation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots & 1 \quad 0 \\ & & & & & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Stelle } j$$

d.h. $a_{jj} = \lambda \qquad a_{ii} = 1 \quad \forall i \neq j$

$a_{ik} = 0 \quad \forall i \neq k$

Inverse $$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{\lambda} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

d.h. $\tilde{a}_{jj} = \frac{1}{\lambda} \qquad \tilde{a}_{ii} = 1 \quad \forall i \neq j$

$\tilde{a}_{ik} = 0 \quad \forall i \neq k$

Gleichungssystem

i) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$
(Zeile j)

Rücknahme: Multiplikation der selben Zeile mit $\frac{1}{\lambda}$

$$
\begin{array}{r c}
 & \text{i.te Spalte} \\
 & \\
\text{j. Zeile} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{1} & \\ 0 & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$a_{ll} = 1 \quad \forall l$ $\qquad$ $a_{ji} = 1$ alle anderen Einträge sind 0

$$
\begin{array}{r c l}
 & \text{i. Spalte} & \\
\text{Inverse} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ & 1 & & & \boxed{-1} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{j. Zeile}
\end{array}
$$

ii) Addiere Zeile i zu Zeile j

d.h. alle Zeilen bleiben unverändert mit Ausnahme von Zeile j. Zu dieser wird Zeile i dazugezählt

$$
\begin{array}{l} I \quad \cdots \\ II \quad \cdots \\ \vdots \\ (i) \\ \vdots \\ (j) \\ \vdots \end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{l} I' = I \\ II' = II \\ (i)' = (i) \\ (j)' = (j) + (i) \\ \vdots \end{array}
$$

<u>Bsp:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{31} & a_{12} + a_{32} & a_{13} + a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \overbrace{-1+1}^{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Einheitsmatrix}}$$

Die Umformungen iii) und iv) lassen sich durch Hintereinanderausführung von i) und ii) schreiben. Dadurch sind auch diese Invertierbar!

iii) Tausch von Zeile i und j.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{i. Zeile zur j. Zeile}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_i + \vec{a}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{j mit } (-1)]{\text{Multipl. Zeile}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ -\vec{a}_i - \vec{a}_j \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{j. Zeile zur i. Zeile}} \begin{array}{c} \\ i \to \\ \\ j \to \end{array} \begin{pmatrix} \vdots \\ -\vec{a}_j \\ \vdots \\ -\vec{a}_i - \vec{a}_j \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{mal } (-1)]{\text{i. Zeile}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ -\vec{a}_i - a_j \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{j. Zeile}]{\text{i. Zeile zur}} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ -\vec{a}_i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{j. Zeile mal } (-1)} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \\ i \to \\ \\ j \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}$$

iv) „Addition des λ-Fachen von Zeile i zur Zeile j"

Falls $\lambda = 0$ trivial (identische Umformung)

Falls $\lambda \neq 0$: Multipliziere Zeile i mit λ, dann addiere „neue" Zeile i zu Zeile j, multipliziere Zeile i mit $\frac{1}{\lambda}$

$$\begin{array}{rc} j\text{. Zeile} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \boxed{\lambda} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \qquad\qquad\qquad\uparrow \\ & \qquad\qquad\qquad i\text{.te Spalte} \end{array}$$

Wir werden nun iii) und iv) benutzen, um das Gleichungssystem auf eine schöne Form zu bringen

<u>Achtung</u>! Die Umformungen betreffen nicht nur die Matrix A sondern auch den Vektor b!

$$\boxed{Ax = b} \to MAx = M \cdot b$$

<u>Bemerkung</u>: Das Gleichungssystem ist durch Angabe von A und b bestimmt. Beide werden von Umformungen erfasst. Geschickt ist die Schreibweise in folgender Notation:

<u>Def</u>: Sei $A \in M(n \times m)$ $b \in \mathbb{R}^n$ Dann nennt man die Matrix $\boxed{(A \mid b)}$ erweiterte Koeffizientenmatrix.

<u>Bemerkung</u>! Die Umformungen oben können wir einfach an dieser erweiterten Matrix vornehmen.

Gauß-Verfahren: Wir bringen das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform, dann ist die Lösung relativ einfach.

Def: Eine Matrix hat Zeilenstufenform, wenn folgendes gilt:

Sei e_i der erste Eintrag in Zeile i, der ungleich Null ist,

Zeilenstufenform: $e_i > e_j$ falls $i > j$.

Bsp:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \qquad \underbrace{}_{b}$$

$e_1 = 1$

$e_2 = 3$

$e_3 = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot x_1 + 0\, x_2 + \boxed{0 \cdot x_3} = 1 \quad ↯$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ +\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Erw. Koeffizienten matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{III' = III - 3I}{\widehat{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{II' = II - 2I}{\widehat{=}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{III' = III - II}{\widehat{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$$

III ✓ $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

$II: \cancel{0 \cdot x_1} - x_2 + x_3 = 0$

$\lambda := \boxed{x_2} = +x_3$

$I: x_1 + \lambda + \cancel{0(-\lambda)} = 1$

$\Rightarrow x_1 = 1 - \lambda$