Übungen zur Linearen Algebra 1 (Mathematik für Physiker II)

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen, Dominik Edelmann

Blatt 10

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei ein komplexer Vektorraum V und zwei Skalarprodukte $(\cdot,\cdot) : V^2 \to \mathbb{C}$ und $[\cdot,\cdot] : V^2 \to \mathbb{C}$. Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$.

Zeigen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle : V^2 \to \mathbb{K}$ definiert durch $\langle x, y\rangle := \lambda(x,y) + \mu[x,y]$ ist ebenfalls ein Skalarprodukt.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Gegeben seien die Fuktionen $1, \sin(2\pi x), \cos(2\pi x), \sin(4\pi x), \cos(4\pi x)$ mit Definitionsbereich $[0,1]$. Es sei V der von diesen Funktionen aufgespannte Untervekotrraum des Funktionenraums. Gegeben Sei das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $1, \sqrt{2}\sin(2\pi x), \sqrt{2}\cos(2\pi x), \sqrt{2}\sin(4\pi x), \sqrt{2}\cos(4\pi x)$ eine Orthonormalbasis von V bilden.

(b) Bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ für $f(x) = 1 + \sin 2\pi x$ und $g(x) = (\sin(2\pi x))^2$.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei ein endlichdimensionaler, komplexer Vektorraum V und ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : V^2 \to \mathbb{C}$. Außerdem Sei $\mathcal{M} \subset V$ eine Menge von Vektoren in V. Zeigen Sie, die Menge aller Vektoren, die auf ganz $\mathcal{M}$ senkrecht stehen $U_{\mathcal{M}}^{\perp} := \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \ \forall\, w \in \mathcal{M}\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Zeigen Sie: $V = U_{\mathcal{M}}^{\perp} \oplus \operatorname{span}(\mathcal{M})$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Gegeben seien $n \times n$-Matrizen A und B mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ bzw. $b_{ij} \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, es existieren komplexe Zahlen λ und μ, so dass $b_{ij} = \lambda^i \mu^j a_{ij}$.

Zeigen Sie: $\det B = (\lambda\mu)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det A$.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mo., den 11.07.2022, um 8.00 Uhr.