Übungen zur Linearen Algebra 1 (Mathematik für Physiker II)

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen, Dominik Edelmann

Blatt 2

Aufgabe 1 *(3 Punkte)***:** (a) Zeigen Sie, dass in jeder Gruppe $(G, \oplus)$ die sogenannte Kürzungsregel gilt: $a \oplus b = c \oplus b \Leftrightarrow a = c \Leftrightarrow b \oplus a = b \oplus c$.

(b) Zeigen Sie, dass in jedem Körper $(K, \oplus, \odot)$ für alle $a, b, c, d \in K$, $b, d \neq 0$ folgendes gilt:

$$a \odot b^{-1} \oplus c \odot d^{-1} = (a \odot d \oplus c \odot b) \odot (b \odot d)^{-1}$$

Bemerkung: Dies ist die Verallgemeinerung der Bruchrechenregel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ auf beliebige Körper K.

(c) Zeigen Sie, dass in keinem Körper die Null ein Inverses bezüglich der Multiplikation besitzt.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Sei M eine Menge. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller bijektiven Abbildungen auf M, d.h. $\mathcal{B} = \{f : M \to M, f \text{ bijektiv }\}$.

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{B}, \circ)$ eine Gruppe ist. Die Verknüpfung $\circ$ ist dabei die Komposition von Abbildungen.

Ist die Gruppe abelsch?

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper. Zeigen Sie: $x \odot x = y \odot y \Leftrightarrow x = y$ oder $x = -y$. Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Gültigkeit der dritten binomischen Formel $a \odot a \oplus (-(b \odot b)) = (a \oplus b) \odot (a \oplus (-b))$.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper. Ein Elemet $q \in K$ heißt Quadratzahl, falls es ein $x \in K$ mit $x \odot x = q$ gibt. Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Körper K_p für Primzahlen $p > 2$ genau $\frac{p+1}{2}$ Quadratzahlen besitzt. Geben Sie alle Quadratzahlen von K_5 , K_7 und K_{13} an.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mo., den 09.05.2022, um 8.00 Uhr.