Übungen zur Linearen Algebra 1
(Mathematik für Physiker II)

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen, Dominik Edelmann

Blatt 4

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Sei P der Vektorraum aller Polynome höchstens zweiten Grades. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := (1, x, x^2)$ und $\mathcal{B} := (1 + x, 1 - x, 2x + x^2)$ geordnete Basen von P sind.

Geben Sie die Koordinatendarstellung folgender Vektoren in der jeweils anderen Basis an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Sei V ein Vektorraum über K mit $2 \leq \dim V = n < \infty$. Sei $U \subsetneq V$ ein echter Untervektorraum von V so dass $U \cap W \neq \{0\}$ für alle zweidimensionalen Untervektorräume $W \subset V$. Zeigen Sie: $\dim U = n - 1$.

Das Wort "echter" bezieht sich hier auf die Teilmengeneigenschaft, d.h. U ist echte Teilmenge von V.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Sei V ein Vektorraum über einen Körper K, $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: Es existiert ein Untervektorraum $W \subset V$, so dass $U \cap W$ nur den Nullvektor enthält und $U \oplus W = V$ ist.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Seien V, W Vektorräume über dem selben Körper K, $f : V \to W$ sei linear und $U \subset W$ sei ein Untervektorraum von W. Zeigen Sie: $f^{-1}(U)$ ist ein Untervektorraum von V.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mo., den 23.05.2022, um 8.00 Uhr.