Übungen zur Linearen Algebra 1 (Mathematik für Physiker II)

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen, Dominik Edelmann

Blatt 5

Aufgabe 1 *(2 Punkte)***:** Gegeben seien ein K-Vektorraum V sowie zwei Untervektorräume $U \subset V$ und $W \subset V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

(a) $U \cap W = \{0\}$

(b) Für jede Basis $\mathcal{A}$ von U und jede Basis $\mathcal{B}$ von W ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ Basis von $U \oplus W$.

(c) Für linear unabhängige Teilmengen $\mathcal{L} \subset U$ und $\mathcal{R} \subset W$ ist $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ linear unabhängig.

Bemerkung: Falls für die beiden Untervektorräume U, W die obigen Eigenschaften gelten, so nennt man die Summe der Vektorräume $U \oplus W$ "direkte Summe" von U und W.

Aufgabe 2 *(2 Punkte)***:** Ein Endomorphismus p auf einem Vektorraum V heißt Projektion, falls $p \circ p = p$. Zeigen Sie, dass für endlichdimensionale Vektorräume und Projektionen $p : V \to V$, die direkte Summe aus Bild und Kern von p gleich dem Vektorraum V ist. Welche besondere Eigenschaft haben alle Vektoren im Bild einer Projektion?

Aufgabe 3 *(2 Punkte)***:** Sei $\mathcal{P}_5$ die Menge der reellen Polynome höchstens fünften Grades. Die Abbildung $f : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ sei gegeben durch:

$$f(p)(x) = xp'(x) - 2p(x) \ .$$

Zeigen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung f. Geben Sie jeweils eine Basis für Kern und Bild an.

Zur Notation: Da $f : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$, ist $f(p)$ selbst ein Polynom. $f(p)(x)$ steht hier für die Auswertung dieses Polynoms an der Stelle x, p' bezeichnet die Ableitung des Polynoms p.

Aufgabe 4 *(2 Punkte)***:** Gegeben sei ein Vektorraum V und ein Endomorphismus $f : V \to V$. Es sei $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Zeigen Sie, dass dass die Vektoren $\{v, f(v), f^2(v), \ldots f^n(v)\}$ linear unabhängig sind.
f^n bedeutet hier die n-fache Ausführung der Abbildung f, z.B. $f^3 = f \circ f \circ f$.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mo., den 30.05.2022, um 8.00 Uhr.