MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN SoSe 2022

Übungen zur Linearen Algebra 1 (Mathematik für Physiker II)

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen, Dominik Edelmann

Blatt 6

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Gegeben Sei der Vektorraum $\mathcal{P}_2$ aller Polynome höchstens zweiten Grades und folgende Basen des Vaktorraumes: $\mathcal{A} = \{1 + x, 2x, x^2 - x\}$ und $\mathcal{B} = \{1, x + 2, x^2 - 1\}$.

Es sei f die lineare Abbildung, die jedes Polynom p auf

$$f(p)(x) = xp'(x) - 2p(x)$$

abbildet (Siehe Aufgabe 3, Blatt 5).

Bestimmen Sie die Matrizen $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(id_{\mathcal{P}_2})$, $B := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathcal{P}_2})$ sowie $C := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ sowie Bild und Kern der Matrix C.

Aufgabe 2 *(1 Punkt)*: Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Über $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; F(x) = Ax$ lässt sich diese Matrix als Endomorphismus im $\mathbb{R}^3$ verstehen.

Finden Sie Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F)$ die 3×3 Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Es sei $p : V \to V$ eine Projektion auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V ($\dim V = n$) (Siehe Blatt 5 Aufgabe 2). Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}, r \leq n$ und eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(p)$ die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Hier bezeichnet $\mathbb{E}_r$ die $r \times r$- Einheitsmatrix, die Nuller stehen für entsprechende Nullmatrizen, d.h. Matrizen, deren Einträge alle Null sind.

Aufgabe 4 *(3 Punkte)***:** Es sei M eine Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ heisst Fixpunkt, falls $f(x) = x$. Die Teilmenge $P_f \subset M$, die aus allen Fixpunkten von f besteht, nennt man die Fixpunktmenge von f. Jede Menge $F \subset M$ mit der Eigenschaft $f(F) = F$ nennt man Fixmenge.

Zeigen Sie: Die Fixpunktmenge ist immer eine Fixmenge. Geben Sie Beispiel einer Abbildung und einer Fixmenge an, die nicht die Fixpunktmenge ist.

Sei nun M ein K-Vektorraum und f linear. Zeigen Sie, dass die Fixpunktmenge ein Untervektorraum von M ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Fixmenge an, die kein Untervektorraum von M ist.

Zeigen Sie außerdem, dass sich für jeden endlichdimensionalen Vektorraum M eine Basis $\mathcal{B}$ finden lässt, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

hat. Hier bezeichnet $\mathbb{E}_r$ die $r \times r$- Einheitsmatrix, wobei r die Dimension der Fixpunktmenge von f ist.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mo., den 06.06.2022, um 8.00 Uhr.