Übungen zur Linearen Algebra 1 (Mathematik für Physiker II)

Prof. Dr. P. Pickl
Kajetan Söhnen, Dominik Edelmann

Blatt 9

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*: Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*: (a) Schreiben Sie die Permutation $\sigma = (3, 2, 5, 1, 4)$ als Produkt von Vertauschungen und geben Sie die Inverse von σ an.

(b) Zeigen Sie: Für jede Permutation $\sigma = \prod_{j=1}^{k} \sigma_j$, wobei die σ_j Vertauschungen sind, gilt: $\sigma^{-1} = \prod_{j=n}^{1} \sigma_j$. Hier bezeichnet $\prod_{j=n}^{1} \sigma_j$ das Produkt aller Faktoren σ_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in absteigender Indexfolge, d.h. $\prod_{j=n}^{1} \sigma_j = \sigma_n \sigma_{n-1} \ldots \sigma_1$.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)*: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_j \in \mathbb{R}$ für $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gegeben.

Zeigen Sie durch Induktion die Gültigkeit der sogenannten Vandermonde-Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Hinweis: Subtrahieren Sie im ersten Schritt von jeder Spalte (bis auf der ersten) das x_n-fache der vorherigen Spalte. Warum ändert das den Wert der Determinante nicht?

Aufgabe 4 *(2 Punkte)*: Sei $M = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n < k$. Eine Funktion $\Psi : M^n \to \mathbb{K}$ heißt antisymmetrisch falls für beliebige $0 \leq i < j \leq n$ gilt:

$$\Psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\Psi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{A}$ aller antisymmetrischen Funktionen ein Untervektorraum der Menge $\mathcal{F}$ aller Funktionen $M^n \to \mathbb{K}$ ist. Welche Dimension haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}$?

Es sei $\phi_k : M \to \mathbb{K}$ die Funktion definert durch $\phi_k(j) = \delta_{j,k}$, d.h. $\phi_k(k) = 1$ und $\phi_k(j) = 0$ falls $j \neq k$.

Für eine beliebige n-elementige, geordnete Teilmenge $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \ldots < j_n \leq k$ definieren wir die folgende Funktion:

$$\Psi_T(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} \phi_{j_1}(x_1) & \phi_{j_1}(x_2) & \ldots & \phi_{j_1}(x_n) \\ \phi_{j_2}(x_1) & \phi_{j_2}(x_2) & \ldots & \phi_{j_2}(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{j_n}(x_1) & \phi_{j_n}(x_2) & \ldots & \phi_{j_n}(x_n) \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie: Die Funktionen $\{\Psi_T : T = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ mit } 1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_n \leq k\}$ bilden eine Basis von $\mathcal{A}$.

Abgabe eines Lösungspdfs je Gruppe bis Mo., den 04.07.2022, um 8.00 Uhr.