Klausur lineare Algebra I/Mathematik f. Physiker II

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

29. Juli 2022

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlossenem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.

Name, Vorname:..

Matrikelnummer:..

Studienfach:...

Zulassung erworben bei :..

1	2	3	4	5	Σ

1 Probeklausur:

Aufgabe 1: Entscheiden Sie, ob die folgende Relation eine Äquivalenzrelationen ist. Beweisen Sie Ihre Aussage: Es sei auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die folgende Relation definiert: $x \sim y : \sqrt{xy} \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens zwei. Es ist durch $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\langle f, g \rangle := \int_0^1 x f(x) g(x) dx$ ein Skalarprodukt definiert. (Beachten Sie den Faktor x im Integranden, wir haben also ein anderes Skalarprodukt als in der Vorlesung definiert).

Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}$ in Bezug auf dieses Skalarprodukt.

Aufgabe 3: Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $P : V \to V$ eine orthogonale Projektion, d.h. $P^2 = P$ und $\langle P(v) - v, b \rangle = 0$ für alle $v \in V$ und alle b im bild von P.

Zeigen Sie: P ist diagonalisierbar und hat nur 0 und 1 als Eigenwerte.

Aufgabe 4: Gegeben sei die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finden Sie Produkte von Elementarmatrizen S und T, so dass SAT die 3×3-Einheitsmatrix ergibtund bestimmen Sie dann die Inverse von A.

Aufgabe 5: Gegeben Sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Durch $\langle x, y \rangle_M := x^t M y$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Bestimmen Sie die Adjungierte der Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bezogen auf das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_M$