Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2022

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 5 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 05.05.22

Einschub: DGL-Systeme

Jede DGL 2. Ordung ist äquivalent zu einem System aus zwei DGLn 1. Ordnung.

Beispiel: $y'' + y = 0$ & allgemein https://youtu.be/EY_5CbZsfMA (6 min) (1)

Schreiben Sie nun

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = \mathrm{e}^{-2x} \tag{2}$$

um, in ein äquivalentes System von DGLn 1. Ordnung.

9.4 Existenz und Eindeutigkeit für DGLn 1. Ordnung

Fragestellung & Erwartungen https://youtu.be/OdKRYax5nsk (6 min) (3)

Ein Beispiel, bei dem vielleicht etwas Unerwartetes passiert:

$y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}\,,\ y(0) = 0$ https://youtu.be/1jXF6XkT7ao (2 min) (4)

Der folgende Satz erklärt, wann so etwas *nicht* passieren kann (d.h. warum unsere AWPe typischerweise *eindeutige* Lösungen haben).

Satz. (Picard-Lindelöf)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei im Rechteck

$$D = \big\{(x, y) \,\big|\, |x - x_0| \le a\,,\ |y - y_0| \le b\,,\ a, b \in \mathbb{R}^+ \textit{ fest}\big\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

stetig und dort stetig nach y differenzierbar. Weiter seien M und h durch

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)| \quad \textit{und} \quad h = \min\left(a, \tfrac{b}{M}\right) \tag{6}$$

definiert. Dann gibt es in der Umgebung

$$U_h(x_0) = \big\{x \,\big|\, |x - x_0| < h\big\} \tag{7}$$

der Stelle x_0 genau eine Lösung des AWPs

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)\,, \quad y(x_0) = y_0\,. \tag{8}$$

Huch! Das sollten wir uns mal aufmalen!

https://youtu.be/j4a0EADLpGU (8 min) (9)

Überlegen Sie: Wie erklärt das jetzt, was im obigen Beispiel passiert ist?

Wenn Sie theorieaffin sind, dann werfen Sie auch einen Blick auf die Beweisskizze im Skript. Wenn Sie momentan primär daran interessiert sind, typische Aufgaben lösen zu können, dann begnügen Sie sich zunächst mit der Aussage des Satzes.

Übrigens: Der Satz gilt ganz analog für Systeme von DGLn 1. Ordnung (und damit, wegen des obigen Einschubs, auch für DGLn höherer Ordnung). Wir kommen darauf nochmal zurück, wenn wir die geeignete Sprache für dieses Situationen gelernt haben (Funktionen mehrerer Veränderlicher etc.).

10.1 Eigenwerte & Eigenvektoren

Zum Einstieg multiplizieren wir ein paar Matrizen und Vektoren:

https://youtu.be/rCUqO_pAQ70 (5 min) (10)

Definition: (Eigenwert, Eigenvektor)
Sei A eine quadratische Matrix, d.h. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) von A, wenn gilt:

$$\text{Es gibt ein } \vec{x} \neq \vec{0} \quad \text{mit} \quad A\vec{x} = \lambda\vec{x}\,. \tag{11}$$

Jedes solche $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ heißt zugehöriger Eigenvektor (EV).

Warum $\vec{x} \neq \vec{0}$? Und warum "Jedes"? https://youtu.be/4uOYcI4bS9I (2 min) (12)
