

## Mathematik 2 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 6 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 09.05.22

---

### 10.1 Eigenwerte & Eigenvektoren (Fortsetzung)

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .

**Lemma.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :  $\lambda$  ist Eigenwert von  $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

**Beispiel:** <https://youtu.be/IZaU2LgYsz0> (3 min) (1)

OK, aber wieso? <https://youtu.be/2VkJdTrqaZA> (3 min) (2)

Bestimmen Sie nun selbst alle EWe von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

---

Zum EW  $\lambda$  gehörende EVen lösen das homogene LGS  $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ .

**Beispiel:** <https://youtu.be/g2-21KxyY4k> (4 min) (4)

Bestimmen Sie nun auch alle EVen von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

---

Die EWe und EVen mancher Matrizen haben besonders hübsche Eigenschaften. Deshalb lohnen sich ein paar Definitionen...

### 10.2 Einige Begriffe

**Definition:** Sei  $A$  eine quadratische Matrix,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

- (i)  $A$  heißt hermitesch, falls  $\overline{A}^T = A$ .
- (ii)  $A$  heißt symmetrisch, falls  $A$  reell, also  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , und  $A^T = A$ .
- (iii)  $A$  heißt unitär, falls  $\overline{A}^T A = I$  (d.h.  $A^{-1} = \overline{A}^T$ ).
- (iv)  $A$  heißt orthogonal, falls  $A$  reell, also  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , und  $A^T A = I$  (d.h.  $A^{-1} = A^T$ ).

**Beispiele und Erläuterungen:** [https://youtu.be/PERKs\\_a2db8](https://youtu.be/PERKs_a2db8) (9 min) (6)

### Konsequenzen:

(U1) Die Spalten einer unitären  $n \times n$ -Matrix bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$ .

[https://youtu.be/nfI\\_1IoV0tg](https://youtu.be/nfI_1IoV0tg) (8 min)

(U2)  $A$  unitär  $\Rightarrow |\det A| = 1$ .

(U3) Produkte unitärer Matrizen sind unitär.

<https://youtu.be/cUkfveBVwB0> (3 min)

(U4) Unitäre Transformationen erhalten Längen und Winkel.

<https://youtu.be/TLuQe1UXFMo> (4 min)

(H1)  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch  $\Leftrightarrow \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$ .

<https://youtu.be/egt63FyPfXA> (6 min)

(H2) Ist  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch, so ist auch  $\overline{A}^T B A$  hermitesch (für beliebiges  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ).

**Überlegen Sie selbst**, warum (U2) und (H2) richtig sind.