Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2022
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 7 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 12.05.22

10.3 Diagonalisierbarkeit

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine reguläre (d.h. invertierbar) Matrix S gibt, so dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ https://youtu.be/vB2AEQos1vY (4 min) (2)

Wozu könnte das gut sein? https://youtu.be/TZjfxLojZCo (4 min) (3)

Bemerkungen:

$$S = (\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n) \text{ ist regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det S \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n \text{ sind l.u.} \tag{4}$$

Ist A diagonalisierbar, so sind die λ_j EWe mit zugehörigen EVen $\vec{s}_j$:

https://youtu.be/qY5DDOpZANc (4 min) (5)

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer l.u.:

https://youtu.be/zWxa6sOiyys (4 min) (6)

Damit sind $n\times n$-Matrizen mit n *unterschiedlichen* EWen automatisch diagonalisierbar.

Überlegen Sie selbst: Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Hinweis: Bestimmen Sie EWe und eventuell EVen.

Hermitesche (und symmetrische) Matrizen sind besonders schön, denn

ihre EWe sind reell https://youtu.be/_sDeDYRdMj4 (2 min) und (8)

EVen zu unterschiedlichen EWen sind orthogonal zueinander
https://youtu.be/APXaucIgtF4 (3 min) (9)

Es gilt sogar. . .

Satz. (Hauptachsentransformation)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch (symmetrisch), dann existiert eine unitäre (orthogonale) Matrix U mit

$$\overline{U}^T AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei λ_j die Eigenwerte von A sind.

Was wäre überhaupt noch zu zeigen? https://youtu.be/R4Cedn9XP2c (4 min) (11)

Kurzanleitung zur Hauptachsentransformation (HAT)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch (oder $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch)

(i) Berechne das charakteristische Polynom χ_A.

(ii) Bestimme die Nullstellen von χ_A (also die EWe von A) mit Vielfachheiten.

(iii) Bestimme zu jedem EW genügend (so viele wie die Vielfachheit der Nullstelle) zueinander orthogonale, normierte EVen $\vec{u}_j$.

(iv) Dann ist $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ unitär (orthogonal), und $\overline{U}^T AU$ ist diagonal.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \quad \text{https://youtu.be/0FwSJq90Pxk (12 min)} \tag{12}$$

Wenn Ihnen jetzt der Kopf schwirrt, dann lassen das hier drunter weg. Darüber können wir auch noch der Vorlesung sprechen, wenn wir das Beispiel von gerade eben hinreichend verdaut haben.

Anwendung:

A diagonalisierbar: $e^{Ax} = ?$ https://youtu.be/GkyDmVo_TY4 (7 min) (13)

Überlegen Sie selbst: Wenn A hermitesch ist, wie können wir dann die HAT verwenden, um A^{-1} zu berechnen? Und an welcher Stelle erkennen wir, ob A überhaupt invertierbar ist?