Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2022

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 12 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 02.06.22

Kurvenintegrale

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^n$ stetig (komponentenweise) und $\vec{x} : [a, b] \to M$ diffbar auf (a, b). Wir nennen

$$\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x} := \int_a^b \vec{f}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

Kurvenintegral von $\vec{f}$ längs der Kurve $\mathfrak{K} = \{\vec{x}(t) \,:\, t \in [a, b]\}$.

Beispiele:

(a) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{9\pi}{4}]$ (2)

https://youtu.be/BCYstixUJ-g (6 min)

(b) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$ **Probieren Sie's selbst!** (3)

Gibt es ein $F : M \to \mathbb{R}$ mit $\nabla F = \vec{f}$, dann wird es einfacher:

$$\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x} = F\big(\vec{x}(b)\big) - F\big(\vec{x}(a)\big)$$ https://youtu.be/vnxvkyDRfz8 (2 min) (4)

Beispiel https://youtu.be/CY1877vfMfA (4 min) (5)

Und wozu das alles? Anwendungsbeispiele:

Arbeit im Kraftfeld, Potentiale, ... https://youtu.be/tythracw_lU (7 min) (6)

11.4 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Höhere partielle Ableitungen bilden wir durch mehmaliges partielles Ableiten. Leiten wir zuerst nach x_j und dann nach x_k ab, so sind dafür zwei Schreibweisen sind üblich:

$$f_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$ https://youtu.be/ck0vWUtslag (3 min) (7)

Beispiel:

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x\cos y$$ https://youtu.be/Km6808b99Ik (4 min) (8)

Notation: f heißt k mal stetig (partiell) diffbar auf M, falls alle k-ten partiellen Ableitungen auf M existieren und stetig sind. Wir schreiben dann $f \in C^k(M)$, insbesondere

- $f \in C^0(M)$: f stetig
- $f \in C^1(M)$: alle part. Abl. existieren und sind stetig ($\Rightarrow f$ total diffbar auf M)

Satz. (Lemma von Schwarz)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(M)$. Weiter existiere $f_{x_j x_k}$ auf M und sei dort stetig. Dann folgt: $f_{x_k x_j}$ existiert ebenfalls, und es gilt $f_{x_k x_j} = f_{x_j x_k}$. (ohne Beweis)

Beispiel: Sei $f(\vec{x}) = y^3 \cos\left((x^4 - z^3)\,\mathrm{e}^{xz}\right) + 2y\,\mathrm{e}^{x+z}$. **Bestimmen Sie** $\dfrac{\partial^{20} f}{\partial x^7 \partial y^6 \partial z^7}(\vec{x})$.

Bemerkung: Hat ein Vektorfeld $\vec{f}$, komponentenweise C^1, eine Stammfunktion F, d.h. $\vec{f} = \nabla F$, so gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \qquad \text{https://youtu.be/VUMKstQk0pg (3 min)} \tag{9}$$

Überpüfen Sie damit, ob die Vektorfelder $\vec{f}$ aus (2) & (3) Stammfunktionen haben.

Jetzt kommt noch ein bisschen Notation, die sich nächstes Mal beim mehrdimensionalen Satz von Taylor als sehr nützlich erweisen wird.

Wir lesen ∇f nun als Anwendung des Differentialoperators

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{10}$$

auf die Funktion f.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{C}^k(M)$ und $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Dann gilt

$$\left((\nabla \vec{h})^k f\right)(\vec{x}_0) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} f_{x_{j_1} \cdots x_{j_k}}(\vec{x}_0)\, h_{j_1} \cdots h_{j_k} \tag{11}$$

https://youtu.be/tHlB-1e_mmY (13 min)

Bestimmen Sie die Hesse-Matrix f'' für die Funktion aus (8).

Schreiben Sie die Taylorreihe einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um x_0 mithilfe des Differentialoperators $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, h)$ auf. Wir nehmen an, dass die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert, also

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k = \ldots \tag{12}$$