Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2022

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 14 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 20.06.22

11.6 Vektorwertige Funktionen

Hängt eine Funktion f nicht nur von n Variablen ab, sondern nimmt auch Werte in $\mathbb{R}^m$ an, also $\vec{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$,

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

so können wir Begriffe wie Stetigkeit oder Diffbarkeit komponentenweise definieren, d.h. für die (skalaren) Funktionen $f_1, \dots, f_m$.

Notation: Vektorpfeile über den Funktionsnamen machen's jetzt auch nicht mehr übersichtlicher, also lassen wir sie lieber weg.

Die Idee *Diffbarkeit gleich lineare Approximierbarkeit* funktioniert weiterhin, d.h.

$$f \text{ diffbar in } \vec{x}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + o(|\vec{h}|)\,, \quad |\vec{h}| \to 0\,. \tag{2}$$

Die Ableitung $f'(\vec{x}_0)$ ist konsequenterweise eine $m \times n$-Matrix,

$$\underbrace{f'(\vec{x}_0) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0)}_{\text{zwei Schreibweisen für die Ableitung}} \quad = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Beispiele: Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ und $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_1 \\ \mathrm{e}^{x_2} \\ x_1\, x_2\, x_3 \end{pmatrix}, \qquad f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_4 \\ y_2\, y_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$f'(\vec{y}) = \dots$ https://youtu.be/IODudKuV7gE (1 min) (5)

Bestimmen Sie selbst $g'(\vec{x})$.

Auch die **Kettenregel** gilt weiterhin für $h = f \circ g$, wenn $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diffbare Funktionen sind:

$h'(\vec{x}) = f'\big(g(\vec{x})\big) \cdot g'(\vec{x})$ https://youtu.be/1-0a2LFWSso (3 min) (6)

Beispiel: Mit den Funktionen aus (4) gilt

$h'(\vec{x}) = \dots$ https://youtu.be/TKvwhc0hZCg (2 min) (7)

Berechnen Sie nun zum Vergleich die rechte Seite von (6) mit den Funktionen aus (4).

11.7 Implizit definierte Funktionen

Fragestellung: Wir würden das Gleichungssystem $F(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$, mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ und $F(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{R}^m$, gerne nach $\vec{y}$ auflösen. Ist das eindeutig möglich? Wenn ja, was können wir über $\vec{y} = f(\vec{x})$ lernen, ohne $f(\vec{x})$ explizit zu bestimmen?

https://youtu.be/pY_PTCpaN2g (6 min) (8)

Beispiele:
(a) Löse die folgende Gleichung in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, -1)$ nach y auf:

$$\sin^2 x - y^2 + \mathrm{e}^x = 0$$ https://youtu.be/7YNDcJwqQ6o (5 min) (9)

(b) Ist das folgende Gleichungssystem in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, nach y und z auflösbar, definiert dort also Funktionen $y = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$? Falls ja, was ist $f_1'(0)$ und $f_2'(0)$?

$$\begin{aligned} x^3 + x\mathrm{e}^y + \sin z &= 0 \\ z^2 + y\cos x &= 0 \end{aligned}$$ https://youtu.be/oQkYDRDgKw8 (6 min) (10)

Satz. (Implizite Funktionen)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $F : M \to \mathbb{R}^m$.
Sei weiter $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in M$ mit $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ gegeben, mit $F(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$.
Ferner sei $F \in C^1(M)$ und $\det \frac{\partial F}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es genau eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(\vec{x}_0) \to \mathbb{R}^m$ gibt, mit $f(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ und

$$F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0} \quad \forall\, \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)\,. \tag{11}$$

Weiter gilt $f \in C^1(U_\varepsilon(\vec{x}_0))$ mit

$$f'(\vec{x}) = -\left[\frac{\partial F}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x}))\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x}))\,. \tag{12}$$

Kurz: $F(\vec{x},\vec{y}) = 0$ ist (lokal) nach $\vec{y}$ auflösbar bzw.
definiert (lokal) eine eindeutige Funktion $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Überlegen Sie: Welche Form haben die Matrizen f', $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{x}}$ und $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{y}}$? (13)

Wir schauen uns Beispiel (b) nochmal in der Sprache des Satzes an:

https://youtu.be/G5yCbppQTQE (7 min) (14)

Warum gilt der Satz, und woher kommt diese Monsterformel für f'?

https://youtu.be/QLme6v2OCLs (5 min) (15)
