

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 15 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 23.06.22

Umkehrfunktionen (knüpft an 11.7 an)

Wenn wir die Umkehrfunktion von $f : U \rightarrow V$ (mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$) suchen, d.h. $f^{-1} : V \rightarrow U$ mit $f^{-1}(f(\vec{x})) = \vec{x} \forall \vec{x} \in U$ und $f(f^{-1}(\vec{y})) = \vec{y} \forall \vec{y} \in V$, dann müssen wir $f(\vec{x}) = \vec{y}$ nach \vec{x} auflösen. Das geht (lokal) im Prinzip, wenn $\det f' \neq 0$.

Warum? <https://youtu.be/HSqC4gBI8V0> (3 min) (1)

Es gilt dann

$$f^{-1'}(\vec{y}) = [f'(f^{-1}(\vec{x}))]^{-1}. \quad \text{Warum? } \a href="https://youtu.be/-QN9G63JYmY">https://youtu.be/-QN9G63JYmY (3 min) (2)$$

Beispiel: Für welche (r, ϕ) ist

$$f : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit} \\ f(r, \phi) = \begin{pmatrix} x(r, \phi) \\ y(r, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3)$$

(lokal) umkehrbar, definiert also eine Funktion f^{-1} , die r und ϕ als Funktionen von x und y ausdrückt? Berechne außerdem $f^{-1}'(-3, 0)$.

<https://youtu.be/FpwUKocFPs0> (6 min) (4)

Untersuchen Sie analog

$$f : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit} \\ f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(u) \cos(v) \\ \sinh(u) \sin(v) \end{pmatrix} \quad (5)$$

auf lokale Umkehrbarkeit. HINWEISE: $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$.

11.8 Extrema unter Nebenbedingungen

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und f, g_1, \dots, g_m jeweils $M \rightarrow \mathbb{R}$. $\vec{x}_0 \in M$ heißt lokale Maximalstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, falls

- (i) $g_j(\vec{x}_0) = 0 \forall j = 1, \dots, m$ und
- (ii) es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0) \forall \vec{x} \neq \vec{x}_0$ mit $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon$ und $g_j(\vec{x}) = 0 \forall j = 1, \dots, m$.

(analog: Minimalstelle)

Beispiel: (n=2, m=1) Suche Extremstellen von

$$f(x, y) = e^{-(x-5)^2 - (y-4)^2} \quad (6)$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$, d.h. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Auflösen oder Parametrisieren? <https://youtu.be/eNp8kaZC5Vs> (6 min) (7)

Noch besser: Suche kritische Punkte der Funktion $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$.

Was soll das bringen? <https://youtu.be/3iCBJqrbL8k> (7 min) (8)

Das gilt sogar sogar viel allgemeiner...

Satz. (Lagrange-Multiplikatoren)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(M)$ skalare Funktionen mit $m < n$. Ist $\vec{x}_0 \in M$ ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, und sind $(\nabla g_1)(\vec{x}_0), \dots, (\nabla g_m)(\vec{x}_0)$ linear unabhängig, so gibt es sogenannte Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ für die gilt: Definieren wir (die Lagrange-Funktion)

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) := f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\vec{x}) \quad (9)$$

dann gibt es ein $\vec{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Kurz: Kritische Punkte von L liefern mögliche Extremstellen von f unter den NBen g_j .

Beispiele: Zunächst lösen wir das Eingangsproblem:

<https://youtu.be/2YyQa-WSzew> (10 min) (11)

Probieren Sie's nun selbst für

$$f(x, y) = (x - y)^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (12)$$

Optional: Wenn Sie wissen möchten, warum das – wie im Satz formuliert – auch für mehr Variablen und unterschiedliche Anzahl von Nebenbedingungen klappt, dann schauen Sie sich noch die folgenden Erklärungen an:

<https://youtu.be/fnbqu4ilNZQ> (7 min) (13)