Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2022

Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 16 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 27.06.22

9.5 Existenz und Eindeutigkeit für DGL-Systeme und für DGLn beliebiger Ordnung

In diesem Abschnitt des Skripts lernen wir, dass der Satz von Picard und Lindelöf auch für Systeme von DGLn gilt. Dafür müssen wir nur ein paar Vektorpfeilchen ergänzen, der Rest kann wörtlich übernommen werden. Wegen der Äquivalenz von Systemen und DGLn höherer Ordnung (siehe Einschub auf Anleitung 4 und Übungsaufgabe 26) haben wir damit auch Existenz und Eindeutigkeit für APWe mir DGLn höherer Ordnung. Wenn Sie Lust haben, werfen Sie mal einen Blick auf den Abschnitt.

---

12 Integration im $\mathbb{R}^n$

Wir möchten Volumina und Flächeninhalte berechnen sowie Funktionen über mehrdimensionale Bereiche integrieren oder mitteln.

12.1 Bereichsintegrale als iterierte Integrale

Wir definieren das Bereichsintegral über $B \subseteq \mathbb{R}^2$ als iteriertes Integral:

https://youtu.be/0wH4ObHuqKg (5 min) (1)

Wenn zusätzlich eine Funktion im Integranden steht, können wir uns das auf zweierlei Weise vorstellen:

https://youtu.be/ra8ke_-fi-Q (4 min) (2)

Über was für Bereiche können wir so integrieren?

Am einfachsten sind *Rechtecke* (höherdimensional dann Quader etc.):

https://youtu.be/SBgeQorv4rk (3 min) (3)

Auch gut sind sogenannte *Normalbereiche*:

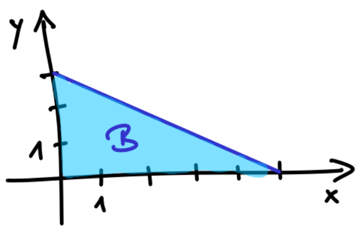
https://youtu.be/AfUr401_r4s (6 min) (4)

Und wenn der Bereich mal kein Normalbereich ist? Dann *zerschneiden* wir ihn!

https://youtu.be/m5d-8ZYGlhE (2 min) (5)

Ergänzen Sie selbst die fehlenden Grenzen bei den folgenden Integralen über den rechts skizzierten Normalbereich,

$$|B| = \int_0^5 \int_{\dots}^{\dots} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (6)$$



Wir fassen das, was wir uns bis hier überlegt haben, in der folgenden Definition zusammen:

Definition: (Bereichsintegral)
Seien $\phi_{1,2}(x)$ stetig auf $[a,b]$ und $\psi_{1,2}(x,y)$ stetig auf

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b\,,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \right\}\,, \tag{7}$$

und sei

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B\,,\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y) \right\}\,. \tag{8}$$

Weiter sei f stetig auf B und g stetig auf K. Dann heißt

$$\int_B f \,\mathrm{d}V = \iint_B f \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

bzw.

$$\int_K g\,\mathrm{d}V = \iiint_K g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} g(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

Bereichsintegral von f über B bzw. von g über K (analog für höhere Dimensionen). Speziell heißen $|B| = \int_B \mathrm{d}V$ Fläche(ninhalt) von B und $\int_K \mathrm{d}V$ Volumen von K.

Beispiele:

Flächeninhalt eines Kreises
$B = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| |\vec{x}| \le R\right\}$ https://youtu.be/P128N9h9n8E (7 min) (11)

Volumen unter einem Parabeldach
$B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| \le 1\,, |y| \le 1 \right\}$ https://youtu.be/1Pamxa8x4w0 (7 min) (12)
$f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

Berechnen Sie nun selbst $\int_B f \mathrm{d}V$ für

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| \le 1\,, x^2 \le y \le 1 \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y) = y - x^2\,. \tag{13}$$