Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2022
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 18 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 04.07.22

12.2 Oberflächenintegrale

Wir möchten nun über zweidimensionale Flächen $\mathcal{F}$ im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ integrieren. Solche Flächen können z.B. implizit, explizit oder parametrisiert gegeben sein:

https://youtu.be/qFlbbwYLdC4 (4 min) (1)

Definition: Eine parametrisierte Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine Abbildung von $B \subseteq \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in B\,. \tag{2}$$

(i) $\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ heißen Tangentialvektoren.
$\mathcal{F}$ bzw. die Parametrisierung heißt regulär, falls $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ l.u.,
d.h. sie spannen eine Tangentialebene auf.

(ii) Ist die Parametrisierung regulär, so heißt $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$ Normale(-neinheitsvektor).

(iii) Ist $\mathcal{F}$ Oberfläche eines dreidimensionalen geometrischen Körpers K, so heißt ein Normaleneinheitsvektor innere Normale $\vec{n}_\mathrm{i}$, falls er ins Innere von K zeigt. Zeigt er dagegen nach außen, so heißt er äußere Normale $\vec{n}_\mathrm{a}$, d.h. $\vec{n}_\mathrm{i} = -\vec{n}_\mathrm{a}$.

Beispiele für parametrisierte Flächen:

$\mathcal{F}$ explizit gegeben	https://youtu.be/Z0-zMdhx0pU (3 min)	(3)
Kugeloberfläche	https://youtu.be/9V_AeO-fp74 (6 min)	(4)
Kegelmantel	https://youtu.be/y4cXwRUV7BI (6 min)	(5)

Parametrisieren Sie nun selbst den Mantel eines Kegelstumpfs mit Höhe h, Radius unten R, Radius oben $r < R$.

Die Integration über $\mathcal{F}$ führen wir zurück auf ein Bereichsintegral über B.

Definition: (Oberfläche / Flächenintegral)
Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, regulär, d.h. $\vec{x} : B \to \mathbb{R}^3$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei f stetig auf $\mathcal{F}$ (d.h. $f \circ \vec{x}$ ist stetig auf B). Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} f \,\mathrm{d}O = \iint_B f\big(\vec{x}(u,v)\big)\,|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{6}$$

Flächenintegral von f über $\mathcal{F}$. Speziell heißt $O(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}O$ Oberfläche von $\mathcal{F}$.

Woher kommt das $|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|$? https://youtu.be/uUXTSB5JfIQ (4 min) (7)

Beispiele:

$$\text{Kugeloberfläche} \qquad \texttt{https://youtu.be/tBjP37Rvcjc}\ (2\,\text{min}) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) = \arctan(\tfrac{y}{x})\ \text{über Kugeloberfläche im ersten Oktant} \\ \texttt{https://youtu.be/qLO7Az1AvdM}\ (5\,\text{min}) \end{aligned} \tag{9}$$

Bestimmen Sie selbst die Oberfläche des oben parametrisierten Kegelmantels.

Interessiert uns der Fluss eines Vektorfelds $\vec{f}$ durch $\mathcal{F}$ so rechnen wir wie folgt.

Definition: (Oberflächenintegral 2. Art / Fluss)
Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, regulär, d.h. $\vec{x} : B \to \mathbb{R}^3$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf $\mathcal{F}$ (d.h. $\vec{f} \circ \vec{x}$ ist stetig auf B). Dann heißt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{O} &= \iint_B \Big(\vec{f}(\vec{x}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\Big) \underbrace{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}_{=\mathrm{d}O} \\ &= \iint_B \vec{f}(\vec{x}(u,v)) \cdot \underbrace{(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}_{=\mathrm{d}\vec{O}} \qquad \text{Fluss von } \vec{f} \text{ durch } \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wieso? `https://youtu.be/FFR08VLQAuI` (4 min)

Überlegen Sie: Welchen Einfluss hat die Wahl der Normale $\vec{n}$ auf das Ergebnis?

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{Fluss von } \tfrac{a\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \text{ durch Kugeloberfläche von innen nach außen} \\ \texttt{https://youtu.be/Qss0WMsj1ek}\ (3\,\text{min}) \end{aligned} \tag{11}$$

Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch den oben parametrisierten Kegelmantel.