Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2022

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 19 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 07.07.22

12.3 Integralsätze

Eindimensionale Integrale lösen wir mir dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für höherdimensionale Integrale können wir ähnliche Beziehungen finden. Dazu betrachten wir den Hauptsatz nochmal aus einem anderen Blickwinkel:

https://youtu.be/kNYiuspm3yg (5 min) (1)

Satz. (Gaußscher Integralsatz)
Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein geometrischer Körper mit parametrisierter Oberfläche ∂K (stückweise glatt) und äußerer Normale $\vec{n}_\mathrm{a}$, und sei $\vec{f}$ ein stetig diffbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint_K \operatorname{div} \vec{f} \, \mathrm{d}V = \oiint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{n}_\mathrm{a} \, \mathrm{d}O \,. \tag{2}$$

Erläuterungen und Begründung:

https://youtu.be/5n_hfqUFx-k (17 min) (3)

Beispiele:

$f(\vec{x}) = \vec{x}$ auf Kugel https://youtu.be/HH88WTpL8WE (5 min) (4)

Sei $W = [0,1]^3$ der Einheitswürfel mit (stückweise) parametrisierter Oberfäche ∂W so, dass die Normale $\vec{n}$ nach außen zeigt. Weiter Sei $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{\partial W} \vec{f} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O$.

Mithilfe des Gaußschen Satzes können wir die anschauliche Bedeutung der Divergenz als Quelldichte erkennen:

https://youtu.be/njtDrGaJkfI (4 min) (5)

Satz. (Stokes'scher Integralsatz in der Ebene)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glatter, positiv orientierter, geschlossener Randkurve ∂B (d.h. das Innere "liegt links" der Kurve), und sei $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 = \oint_{\partial B} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{x} \,. \tag{6}$$

Beweis: https://youtu.be/9WWaRzelvDo (13 min) (7)

Sein nun $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbares Vektorfeld.
Überzeugen Sie sich davon, dass nun

$$\int_B \mathrm{rot}\, \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \oint_{\partial B} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{x} \tag{8}$$

gilt, wobei B weiterhin in der $x_1 x_2$-Ebene liegt. Wie müssen wir dazu die Flächennormale $\vec{n}$ wählen? Hinweis: Die Rotation wurde in Aufgabe 31 definiert.