

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 20 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 11.07.22

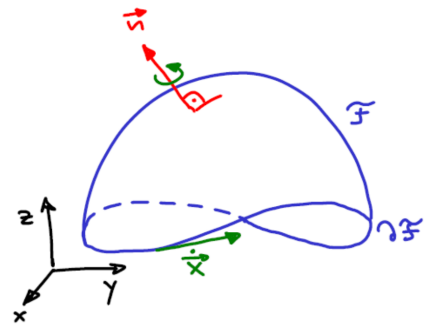
12.3 Integralsätze (Forts.)

Der Satz von Stokes gilt nicht nur in der Ebene sondern auch im \mathbb{R}^3 .

Satz. (Stokes'scher Integralsatz im \mathbb{R}^3)

Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine zweiseitige Fläche, regulär, mit stückweise glatter, geschlossener Randkurve $\partial\mathcal{F}$, die eine Rechtsschraube um die Flächennormale \vec{n} beschreibt, und sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbares Vektorfeld, dann gilt

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \, d\vec{x}. \quad (1)$$



Bekannte Spezialfälle:

ebener Stokes <https://youtu.be/Fv3GDwN1RqE> (2 min) (2)

Kurvenintegrale mit Stammfunktion
(konservative Vektorfelder) <https://youtu.be/eo0gCixy0Tg> (2 min) (3)

Beispiel: Sei $B = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat mit (stückweise) parametrisiertem Rand ∂B so, dass B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ 3x \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\oint_{\partial B} \vec{v} \, d\vec{x}$. (4)

Mithilfe des Stokes'schen Satzes können wir die anschauliche Bedeutung der Rotation als Wirbeldichte erkennen:

https://youtu.be/Ge1oU3m_chI (4 min) (5)

13 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Zum Aufwärmen schauen wir uns ein bisschen auf www.khanacademy.org um. Einen guten Einstieg bieten z.B. die folgenden *Skills*:

Basic set notation / Subsets of sample spaces / Simple probability / Probabilities of compound events / Independent probability / Dependent probability / Simple hypothesis testing

... oder Sie fangen mit dem **Einstufungstest** an.

13.1 Grundbegriffe¹

Wir bedienen uns der Mengenschreibweise:

$$\text{Ereignisse und (Teil-)Mengen} \quad \text{https://youtu.be/fHK2aVwP4ko} \quad (2 \text{ min}) \quad (6)$$

$$\text{Potenzmenge und } \sigma\text{-Algebren} \quad \text{https://youtu.be/v-HCBZK8_Q} \quad (3 \text{ min}) \quad (7)$$

$$\text{Mengenoperationen} \quad \text{https://youtu.be/PMwkaZoedsQ} \quad (3 \text{ min}) \quad (8)$$

Nun wollen wir Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen:

$$\begin{aligned} \text{Wahrscheinlichkeitsma\ss e und -r\aaume} \\ \dots \text{ mit Beispielen} \end{aligned} \quad \text{https://youtu.be/VKRNu2b0Zgo} \quad (8 \text{ min}) \quad (9)$$

Jetzt m\u00fcssen wir oft Dinge abz\u00e4hlen, daher...

13.2 Kombinatorik

Anzahl m\u00f6glicher Anordnungen von n (unterschiedlichen) Objekten:

$$n(n-1)\cdots 1 = n! \quad \text{https://youtu.be/l1_dbrCbv_4} \quad (1 \text{ min}) \quad (10)$$

Anzahl m\u00f6glicher Anordnungen von n Objekten, die in j Gruppen mit jeweils k_1, k_2, \dots, k_j gleichen Objekten vorkommen ($k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$):

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_j!} \quad \text{https://youtu.be/-ySdGGjHCm8} \quad (3 \text{ min}) \quad (11)$$

Urnenmodelle

- Urne mit n unterschiedlichen Kugeln
- Ziehe k Kugeln

Anzahl der m\u00f6glichen Ergebnisse:

	mit Zur\u00fccklegen	ohne Zur\u00fccklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\text{Drei F\u00e4lle...} \quad \text{https://youtu.be/q5k0irz1USg} \quad (4 \text{ min}) \quad (12)$$

$$\dots \text{ und der Vierte.} \quad \text{https://youtu.be/pRA3_rVkwg} \quad (4 \text{ min}) \quad (13)$$

Beispiel: W\u00fcfelzwerge!

$$\text{https://youtu.be/tXH1FDI8yhM} \quad (2 \text{ min}) \quad (14)$$

Überlegen Sie:

- Wie gro\u00df ist jeweils die Wahrscheinlichkeit daf\u00fcr, mit fairen Farbw\u00fcfeln die Kombination f\u00fcr einen ein-, zwei- oder dreifarbigem Zwerg zu w\u00fcfeln?
- Wieviele ein-, zwei- und dreifarbigem Zwerg gibt es jeweils?
- Wieviele K\u00e4rtchen hat das Spiel?

¹Wenn Sie Theorie nicht so prickelnd finden, k\u00f6nnen Sie auch erst mal zur Kombinatorik vorspringen, und nur bei Bedarf hier nachschauen – oder Sie gucken sich sogar als erstes die W\u00fcfelzwerge an.