

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 21 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 14.07.22

Im Folgenden ist (Ω, \mathcal{A}, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition: (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$. Wir nennen

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B .

Warum definieren wir das so? <https://youtu.be/n41jtHkpB6k> (2 min) (2)

Beispiel:

Nochmal Würfeln https://youtu.be/0_lbhfERD90 (3 min) (3)

Definition: (Stochastische Unabhängigkeit)

Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, falls gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Diese Definition ist gut, weil... <https://youtu.be/jyXlkjA87x8> (1 min) (4)

Wir haben bereits gesehen, dass i.A. $P(A|B) \neq P(B|A)$. Mit genügend zusätzlicher Information können wir die beiden aber ineinander umrechnen.

Satz. (Bayes)

Seien A_1, A_2, \dots, A_n disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$, und sei $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$.
Dann gilt für jedes $j = 1, \dots, n$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)}. \quad (5)$$

Beweis: <https://youtu.be/XCtan0l6leY> (8 min) (6)

Beispiel: Antigen(AG)-Schnelltest auf SARS-CoV-2

Bei einem klinischen Test bezeichnet die *Sensitivität* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test Infizierte als infiziert erkennt; die *Spezifität* bezeichnet die Wahrscheinlichkeit

dafür, dass er Nichtinfizierte als nicht-infiziert erkennt. Als *Prävalenz* wird der Anteil der Infizierten an der Bevölkerung (oder einer anderen untersuchten Gruppe) bezeichnet.

Auf dem Beipackzettel eines AG-Schnelltests auf SARS-CoV-2 wird die Sensitivität mit 96,2% angegeben, die Spezifität mit 99,2%. Laut RKI-Lagebericht vom 6.7.21 gibt es in Deutschland aktuell ca. 10 000 aktive Corona-Fälle.¹ Genesen oder vollständig geimpft sind ca. 44% der Bevölkerung. Damit beträgt die Prävalenz unter den Restlichen ca. 0,02%.

Eine zufällig ausgewählte Person (nicht genesen, nicht vollständig geimpft) führt obigen AG-Schnelltest durch. Der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich infiziert ist?

<https://youtu.be/4cVDH0Ma3lo> (7 min) (7)

Ihre Corona-Warn-App schlägt Alarm. Sie hatten Kontakt mit einer akut infizierten Person. Wir nehmen an, Ihr Risiko sich angesteckt zu haben, beträgt 10%. Sie führen obigen AG-Schnelltest durch, der Test fällt positiv aus. **Überlegen Sie**, wie groß nun die Wahrscheinlichkeit ist, dass Sie infiziert sind.

13.4 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Definition: Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (reelle) Zufallsvariable (ZV), wenn gilt

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Was jetzt, Funktion oder Variable? <https://youtu.be/bSoAfAGotz8> (3 min) (9)

Definition: Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine ZV. Wir nennen $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $F_X(x) = P(X \leq x)$ Verteilungsfunktion von X .

Beispiel: Zweifaches Würfeln
inkl. Plot als Stufenfunktion <https://youtu.be/TgFQmYjPy2Y> (4 min) (10)

Eigenschaften
von Verteilungsfunktionen <https://youtu.be/qOGm0Nu1Ft4> (2 min) (11)

Beispiel: Binomialverteilung

Wir sagen X ist binomialverteilt mit Parametern n und p ,
und schreiben dafür $X \sim \text{Bin}(n, p)$, wenn gilt

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad \text{https://youtu.be/lJRbFdTBnw4} \quad (5 \text{ min}) \quad (12)$$

¹Wir bleiben beim Sommer 2021. Eine Anpassung der Aufgabe an die Situation im Sommer 2022 möchte ich mir nicht antun.