Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2022

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 23 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 21.07.22

13.4.1 Kenngrößen von Zufallsvariablen

Vorbemerkung: Ähnlich wie bei Ereignissen definieren wir für Zufallsvariablen...

(stochastische) Unabhängigkeit https://youtu.be/TQSS17-9Sz4 (1 min) (1)

Definition: Sei X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Ist X diskret, und gilt $\sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i|\, P(X{=}x_i) < \infty$, so nennen wir

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i\, P(X{=}x_i) \qquad \text{den } \textbf{Erwartungswert} \text{ von } X. \tag{2}$$

- Ist X stetig mit Dichte f_X, und gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, so nennen wir

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{den } \textbf{Erwartungswert} \text{ von } X. \tag{3}$$

Beispiele:

Faires Würfeln https://youtu.be/8oFATL4oUaU (2 min) (4)

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \quad \Rightarrow \quad E(X) = np \qquad \text{(siehe ÜA 49)} \tag{5}$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad E(X) = \mu \qquad \text{(siehe ÜA 49)} \tag{6}$$

Rechenregeln:
Seien X, Y Zufallsvariablen und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt *immer*

$$E(aX{+}b) = aE(X) + b \qquad \text{und} \qquad E(X{+}Y) = E(X) + E(Y)\,. \tag{7}$$

Sind X, Y stochastisch *unabhängig*, so gilt außerdem

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)\,.$ https://youtu.be/Tqj0n5hu0Bo (4 min) (8)

Definition: Sei X eine ZV mit Erwartungswert $\mu = E(X)$. Falls $E(X^2)$ existiert, so heißt

$$\mathrm{Var}(X) = E\big((X{-}\mu)^2\big) \qquad \textbf{Varianz} \text{ von } X.$$

Bemerkungen:

$$\text{Wir nennen} \quad \sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \quad \text{die } \textbf{Standardabweichung} \text{ von } X. \tag{9}$$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ https://youtu.be/MI7ZQJkcG0k (2 min) (10)

Beispiele:

$$\text{Faires Würfeln} \qquad \texttt{https://youtu.be/8jTSzVASd6k}\ (3\,\text{min}) \tag{11}$$

$$X \sim \text{Bin}(n,p) \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X) = np(1-p) \qquad (\text{siehe ÜA 49}) \tag{12}$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \qquad (\text{siehe ÜA 49}) \tag{13}$$

Rechenregeln:
Seien X, Y Zufallsvariablen und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt *immer*

$$\text{Var}(aX+b) = a^2\,\text{Var}(X)\,. \tag{14}$$

Sind X, Y stochastisch *unabhängig*, so gilt außerdem:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)\,. \qquad \texttt{https://youtu.be/8ScAq--cc8k}\ (3\,\text{min}) \tag{15}$$

Satz. (Tschebyscheff'sche Ungleichung)
Sei X eine ZV, für die $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ existieren. Dann gilt

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad \forall\ a > 0\,. \tag{16}$$

$$\textbf{Beweis:} \qquad \texttt{https://youtu.be/meeu6uWWoe4}\ (6\,\text{min}) \tag{17}$$

Überlegen Sie, wie der Beweis für diskrete ZVn geht. HINWEIS: Summen statt Integrale.

13.6 Grenzwertsätze

Schauen Sie zunächst dem schwachen Gesetz der großen Zahlen bei der Arbeit zu.

Satz. (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)
Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZVn, die alle die gleiche Verteilung haben (kurz: iid), mit $E(X_k) = \mu$ und $\text{Var}(X_k) = \sigma^2\ \forall\ k$. Dann gilt für $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall\ \varepsilon > 0$$

Kurz: Der Mittelwert strebt gegen den Erwartungswert.
Relative Häufigkeiten streben gegen Wahrscheinlichkeiten.

$$\textbf{Beweis:} \qquad \texttt{https://youtu.be/-8Fv9LaugvE}\ (6\,\text{min}) \tag{18}$$

Und wie schnell geht das? Leider nur proportional zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$, aber immerhin. *Und warum?* Wir sehen das bereits im Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen. Schärfere Aussagen liefert:

Satz. (Zentraler Grenzwertsatz)
Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZVn, die alle die gleiche Verteilung haben (d.h. iid), mit $E(X_k) = \mu$ und $\text{Var}(X_k) = \sigma^2\ \forall\ k$. Dann gilt für $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \frac{X_k-\mu}{\sigma}$:

$$Z_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathcal{N}(0,1)\,. \tag{19}$$

(ohne Beweis)

$$\textbf{Bemerkungen:} \qquad \texttt{https://youtu.be/9PHeAllTVJM}\ (6\,\text{min}) \tag{20}$$