

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 24 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 25.07.22

13.5 Stichproben

Definition: Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Stichprobe (n Zahlen, kommen irgendwo her). Dann heißen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Mittelwert (arithmetisches Mittel) und} \quad (1)$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{Varianz (Stichprobenvarianz)} \quad (2)$$

der Stichprobe. Weiter heißt $s_x = \sqrt{s_x^2}$ (empirische) Standardabweichung.

Vorsicht: Diese Kennzahlen für Stichproben sind nicht mit den Kennzahlen für Zufallsvariablen/Verteilungen zu verwechseln! Auch wenn in beiden Fällen eine Größe mit dem Namen "Varianz" auftritt.

Warum der Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$? Der macht s_x^2 erwartungstreu.

$$\text{Was ist Erwartungstreue?} \quad \text{https://youtu.be/VjAcJ1AI14I (3 min)} \quad (3)$$

Wir verwenden den Mittelwert als Schätzer für den Erwartungswert.

Überzeugen Sie sich von der Erwartungstreue, d.h. zeigen Sie, dass gilt $E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) = \mu$, wobei $\mu = E(X_j) \forall j$.

$$\text{Die Stichprobenvarianz ist auch erwartungstreu.} \quad (4)$$
$$\text{https://youtu.be/iWPgdT97PjU (9 min)}$$

13.7.1 Der t-Test

Wir vermuten, dass im *Tänzelnden Pony* die Bierkrüge nicht ordentlich gefüllt werden. Der Wirt, Gerstenmann Butterblume, sagt, dass er natürlich im Mittel mindestens 500 ml ausschenke. Er müsse sogar eher mal überprüfen, ob er die Krüge im Mittel nicht zu voll mache.

Wir haben bei 49 Krügen genau nachgemessen...

$$\text{https://youtu.be/wwDpNPJzZwU (1 min)} \quad (5)$$

Im Mittel waren die Krüge in unserer Stichprobe also mit $\bar{x} \approx 496$ ml Bier gefüllt, Standardabweichung $s_x \approx 8,6$ ml. **Was glauben Sie**, deutet diese Beobachtung auf zu leere, zu volle oder im Mittel gerade richtig gefüllte Krüge hin?

Wir führen einen Hypothesentest durch. Als Teststatistik verwenden wir

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}} \quad \text{https://youtu.be/07G0sNF2hSc (5 min)} \quad (6)$$

wobei $\mu_0 = 500$ ml.

Wie ist T unter H_0 verteilt? <https://youtu.be/OV1kHfu-0gI> (5 min) (7)

Wir legen ein Signifikanzniveau fest, bestimmen T für unsere Stichprobe und entscheiden, ob die Krüge im Mittel 500 ml Bier enthalten oder nicht:

<https://youtu.be/KgZ0woxy4HM> (5 min) (8)

Zum Abschluß bestimmen wir auch noch ein beidseitiges 95%-Vertrauensintervall für die mittlere ausgeschenkte Biermenge:

<https://youtu.be/gpeI-TQ0vGM> (5 min) (9)
