

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 4 (Abgabe am 19.05.2022)

Aufgabe 17

(20 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix D_ϕ aus Aufgabe 14 sowie alle zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 18

(5 Punkte)

Geben Sie für jede der Matrizen aus Aufgabe 17 an, ob sie diagonalisierbar ist – mit minimaler(!) Begründung.

Aufgabe 19

(10 Punkte)

- a) Führen Sie die HAT für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.
- b) Berechnen Sie e^{-Cx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 17.
HINWEIS: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix C .

Aufgabe 20

(3+3+4 = 10 Punkte)

Wir nennen

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von \vec{y} Funktionen von x , und \vec{y}' ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

- a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{u} , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

- b) Zeigen Sie: Jedes \vec{y} der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

- c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, mit A aus Aufgabe 19.

Aufgabe 21

(10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (*)$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Anleitung 4). Definieren Sie dazu

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A , so dass $\vec{u}' = A\vec{u}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare). Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 13 als DGL-System 1. Ordnung. Vergleichen Sie auch hier das charakteristische Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.