

## Mathematik II für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 4 (Abgabe am 19.05.2022)

---

### Aufgabe 17

(20 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $D_\phi$  aus Aufgabe 14 sowie alle zugehörigen Eigenvektoren.

### Aufgabe 18

(5 Punkte)

Geben Sie für jede der Matrizen aus Aufgabe 17 an, ob sie diagonalisierbar ist – mit minimaler(!) Begründung.

### Aufgabe 19

(10 Punkte)

- a) Führen Sie die HAT für die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix  $U$  mit zugehöriger Diagonalmatrix  $D = \overline{U}^T A U$  an.
- b) Berechnen Sie  $e^{-Cx}$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $C$  aus Aufgabe 17.  
HINWEIS: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix  $C$ .

### Aufgabe 20

(3+3+4 = 10 Punkte)

Wir nennen

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von  $\vec{y}$  Funktionen von  $x$ , und  $\vec{y}'$  ist die komponentenweise Ableitung nach  $x$ , d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

- a) Rechnen Sie nach: Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor  $\vec{u}$ , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

- b) Zeigen Sie: Jedes  $\vec{y}$  der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt  $\vec{y}(0)$  an?

- c) Lösen Sie das AWP  $\vec{y}' = A\vec{y}$ ,  $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ , mit  $A$  aus Aufgabe 19.

**Aufgabe 21**

(10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (*)$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Anleitung 4). Definieren Sie dazu

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix  $A$ , so dass  $\vec{u}' = A\vec{u}$  äquivalent zu  $(*)$  wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von  $A$  und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL  $(*)$ .

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare). Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 13 als DGL-System 1. Ordnung. Vergleichen Sie auch hier das charakteristische Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.