

## Mathematik II für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 26.05.2022 – Vorsicht Feiertag!)

---

### Aufgabe 22

(20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a)  $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$

b)  $2x^2 + 12xy - 7y^2 = 5$

c)  $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

d)  $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

### Aufgabe 23

(3+7 = 10 Zusatzpunkte)

a) Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Zeigen Sie:  $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$ .

b) Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von  $a$  ist  $q_A$  positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat  $q_A$  für andere Werte von  $a$ ?

### Aufgabe 24<sup>1</sup>

(5+3+2 = 10 Punkte)

Sei  $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  mit kartesischen Koordinaten  $x, y, z$ . Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist  $T_{xy} = \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$  die Schnittmenge mit der  $xy$ -Ebene.

b) Zeichnen Sie nun  $T \subset \mathbb{R}^3$ .

c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

HINWEIS: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in  $T$  als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.

---

<sup>1</sup>In dieser Aufgabe üben wir das Visualisieren in mehreren Dimensionen. Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr keine Lösung publiziert.