

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 10 (Abgabe 07.07.2022)

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0, 1]^3$ mit Dichte

$$f(x, y, z) = x^2 y e^{xyz} + z e^{xz},$$

d.h. berechnen Sie $m = \int_W f \, dV$.

Aufgabe 42 (10 Zusatzpunkte)

a) Berechnen Sie das Volumen $|E| = \int_E dV$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ positiv definit und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \leq 1\}$. Bestimmen Sie $|K|$.

HINWEIS: Laut des Satzes auf Anleitung 7 (HAT) existiert eine orthogonale Matrix U , so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich also an.

Aufgabe 43 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius R und Dicke d , d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K dV$ für

$$K := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq |\vec{x}| \leq R + d\}.$$

Bestimmen Sie auch $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{|K|}{d}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 44 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z : \text{kartesisch}),$$

b) Bestimmen Sie das Volumen des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \right\}.$$

und zeichnen Sie P .

Aufgabe 45

(10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen des Torus¹

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\},$$

d.h. berechnen Sie $\int_T dV$.

¹vgl. Aufgabe 24. Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr kein Lösungsvideo publiziert.