Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2022
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 02.08.2022

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{20x+22}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = x\,\mathrm{e}^{-y},\ y(0) = 1$.

Aufgabe 3 (4+4+2 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 10y = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 10y = \mathrm{e}^{-x}$.

c) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 10y = \mathrm{e}^{-x},\ y(0) = \frac{1}{9},\ y'(0) = -\frac{1}{9}$.

Aufgabe 4 (10+2+3 = 15 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.

c) Bestimmen Sie $A(A-I)(A-3I)$.

Aufgabe 5 (2+4+4 = 10 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit orthonormierten Eigenvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir definieren die $n \times n$-Matrizen $P_j = \vec{u}_j \overline{\vec{u}_j}^T$. Zeigen Sie:

a) $P_j \vec{u}_k = \delta_{jk} \vec{u}_j \ \forall\, j,k$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P_j = I$ c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j = A$

Hinweis zu b & c: Multiplizieren Sie die Gleichungen mit einem beliebigen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 12xy + y^3\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.
Hinweis: Es ist hilfreich, $f_x - f_y$ zu betrachten.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{1/2} xz^2 \sin(xyz)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 8 (4+5+4 = 13 Punkte)
Wir betrachten einen Kegel mit Grundfläche $x^2 + y^2 \le 4$ (in der xy-Ebene) und Spitze bei $(x,y,z) = (0,0,3)$.

a) Ergänzen Sie den folgenden Ausdruck zu einer Parametrisierung der Mantelfläche, indem Sie jedes $\square$ durch eine geeignete Zahl ersetzen.

$$M = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \square\big(1 - \frac{r}{\square}\big) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le \phi < 2\pi \\ \square \le r \le \square \end{matrix} \right\}$$

b) Berechnen Sie mithilfe der Parametrisierung aus Teil a den Flächeninhalt $|M| = \int\int_M \mathrm{d}O$ des Kegelmantels.

c) Berechnen Sie mithilfe der Parametrisierung aus Teil a den Betrag des Flusses des Vektorfelds $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch den Teil des Mantels mit $y \ge 0$.

Aufgabe 9 (2+4+4 = 10 Punkte)
Sie würfeln gleichzeitig mit einem roten und einem blauen Würfel (beide fair).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel ⚃ zeigt?

b) Mindestens ein Würfel zeige ⚃. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel ⚃ zeigt?

c) Mindestens ein Würfel zeige eine gerade Augenzahl. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel ⚃ zeigt?