Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2022

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 18.10.2022

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\log(x^2)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\log x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{20x-22}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $2yy' = \mathrm{e}^x,\ y(0) = -\sqrt{2}$.

Aufgabe 3 (4+3+3 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 6y' + 10y = 0$.
b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 6y' + 10y = \mathrm{e}^{-3x}$.
c) Lösen Sie das AWP $y'' + 6y' + 10y = \mathrm{e}^{-3x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Aufgabe 4 (10+2+3 = 15 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^TAU$.
c) Bestimmen Sie $A^2(A+I)^3(A-3I)^2$.

Aufgabe 5 (2+4+4 = 10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit orthonormierten Eigenvektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wir definieren die linearen Abbildungen $L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$ durch $L_j(\vec{v}) = (\vec{u}_j \cdot \vec{v})\vec{u}_j$. Zeigen Sie:

a) $L_j(\vec{u}_k) = \delta_{jk}\vec{u}_j \;\forall\, j,k$ b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} L_j(\vec{v}) = \vec{v} \;\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j(\vec{v}) = A\vec{v} \;\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 12xy + y^3\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Hinweis: Es ist hilfreich, $f_x - f_y$ zu betrachten.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x\,\cos y \\ -x^2\sin y - 2y\mathrm{e}^z \\ (1-y^2)\mathrm{e}^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t^2} \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Aufgabe 8 (10+3=13 Punkte)

Sei $\partial\mathcal{T}$ der Torus gegeben durch

$$\partial\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} (2+\sin u)\cos v \\ (2+\sin u)\sin v \\ \cos u \end{pmatrix}\,,\; 0 \le u < 2\pi\,,\; 0 \le v < 2\pi \right\}.$$

a) Berechnen Sie die Oberfläche $\int_{\partial\mathcal{T}} \mathrm{d}O$ des Torus' (mit vollständigem Rechenweg, insbesondere Berechnung des Oberflächenelements dO).

b) Ist $\partial\mathcal{T}$ regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 9 (2+4+4 = 10 Punkte)

Sie würfeln gleichzeitig mit einem roten und einem blauen Würfel (beide fair).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der blaue Würfel ⚂ zeigt?

b) Mindestens ein Würfel zeige ⚂. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der blaue Würfel ⚂ zeigt?

c) Mindestens ein Würfel zeige eine ungerade Augenzahl. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der blaue Würfel ⚂ zeigt?