Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2022
17. Juni 2022

Integralsätze: Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Bogenlänge in Polarkoordinaten (30 Punkte)
Eine Kurve γ in $\mathbb{R}^2$ sei in Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben durch die Gleichung $r = f(\varphi)$ mit $a \leq \varphi \leq b$, wobei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine gegebene C^1-Funktion ist und $a, b \in [0, 2\pi]$ gegebene Konstanten sind.

a) Geben Sie einen Ausdruck für $\gamma(\varphi)$ (in Cartesischen Koordinaten!) an. (Darin sollte f vorkommen.) (10 Punkte)

b) Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für die Länge der Kurve γ an. (Das sollte ein Integral sein, in dem f und f' vorkommen.) Geben Sie auch hier den vollständigen Rechenweg an. (20 Punkte)

Aufgabe 2: Ein Wegintegral zum Aharonov-Bohm-Effekt (40 Punkte)
Sei das Vektorfeld $\underline{A}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$\underline{A}(x, y) = \frac{b}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

mit einer beliebigen Konstanten $b \in \mathbb{R}$. Der geschlossene Weg γ umlaufe den Ursprung entgegen dem Uhrzeigersinn, gegeben in Polarkoordinaten (r, φ) durch die Gleichung $r = f(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, mit einer C^1-Funktion $f : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$, die $f(2\pi) = f(0)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma \underline{A} \cdot d\underline{x} = 2\pi b\,,$$

unabhängig von der Wahl von f.

Aufgabe 3: Stammfunktionen bestimmen (30 Punkte)
Man bestimme (mit Beweis) alle C^1-Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren Gradient von der Form

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x}y + xy^2 + g(y) \\ x^2y + 4y^3x + h(x) \end{pmatrix}$$

mit irgendwelchen (nicht vorgegebenen) C^1-Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. (*Tipp*: Die Lösung enthält vier beliebige Konstanten.)

Abgabe: Bis Freitag, 24.6.2022, um 14 Uhr in den Briefkasten von Herrn Costa.