Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2022
24. Juni 2022

Integralsätze: Übungsblatt 2

Aufgabe 4: Konservative Vektorfelder (30 Punkte)
Sei $\underline{A}$ wie in Aufgabe 2 auf Blatt 1 das Vektorfeld

$$\underline{A}(x_1, x_2) = \frac{b}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ mit $b \neq 0$. Aus Aufgabe 2 folgt, dass $\underline{A}$ nicht konservativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial A_1/\partial x_2 = \partial A_2/\partial x_1$.

(b) Wie kann das sein? Wieso folgt aus (a) nicht mit dem Integrabilitätskriterium, dass $\underline{A}$ konservativ ist?

(c) Seien (r, φ) Polarkoordinaten, $(x_1, x_2) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$. Hierbei hat man die Freiheit, für φ irgendein Intervall $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ der Länge 2π wählen; dann ist φ als Funktion von (x_1, x_2) auf der geschlitzten Ebene $E_\alpha := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r \cos\alpha, r \sin\alpha) : r \geq 0\}$ stetig differenzierbar. Erklären Sie geometrisch, warum auf E_α gilt $\underline{A} = b\nabla\varphi$. Also ist $\underline{A}$ lokal ein Gradient.

Aufgabe 5: Flächenintegrale in $\mathbb{R}^2$ (50 Punkte)

(a) Wiederholen Sie, was der Satz von Fubini besagt. Sei $B_a \subseteq \mathbb{R}^2$ der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $x_2 = x_1$ und der Parabel $x_2 = x_1^2$, und sei $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Verifizieren Sie den Satz von Fubini für B und f, indem Sie $\int_{B_a} f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2)$ durch iterierte Integrale in beiden Reihenfolgen berechnen.

(b) Für

$$B_b = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq x_1\Big\}$$

versuchen Sie, $\int_{B_b} e^{x_1^2}\, d(x_1, x_2)$ in beiden Reihenfolgen zu berechnen, und führen Sie eine der beiden Rechnungen bis zum Ende. Welche Reihenfolge eignet sich besser und warum?

(c) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene $x_3 = 2 - 2x_1 - x_2$ begrenzt wird.

Aufgabe 6: Verschwindender Gradient (20 Punkte)
In Analysis 1 wurde gezeigt, dass eine C^1-Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, deren Ableitung überall verschwindet, konstant sein muss. Zeigen Sie daraus: Wenn $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist und $F : G \to \mathbb{R}$ ein C^1-Skalarfeld mit $\nabla F = 0$, dann ist F konstant.

Abgabe: Bis Freitag, 1.7.2022, um 14 Uhr in den Briefkasten von Herrn Costa.