Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2022
1. Juli 2022

Integralsätze Übungsblatt 3

Aufgabe 7: Torus als glatte Fläche (20 Punkte)
Der Torus sei die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^3$ mit Abstand $r > 0$ vom Kreis mit Radius $R > r$ um den Ursprung in der xy-Ebene. Geben Sie eine glatte Parametrisierung $\phi(\varphi, \theta)$ des Torus mit Parameterbereich $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ an, berechnen Sie den Normalenvektor $\phi_\varphi \times \phi_\theta$ und weisen Sie nach, dass die Definition 2.1 einer glatten Fläche erfüllt ist.

Aufgabe 8: Satz von Stokes (50 Punkte)
Der Satz von Stokes besagt: Für eine orientierte stückweise-C^1-Fläche $\mathcal{F}$ mit positiv orientierter Randkurve $\partial\mathcal{F}$ und ein C^1-Vektorfeld $\underline{f}$, das auf einer offenen Umgebung von $\mathcal{F}$ definiert ist, gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\partial\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{x}. \tag{1}$$

Wir wollen diese Beziehung in einem konkreten Fall verifizieren. Dazu sei $\mathcal{F}$ die nördliche Hemisphäre vom Radius 1 um den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ mit der Orientierung, in der $\underline{n}$ nach außen zeigt. Das C^1-Vektorfeld $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\underline{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Man berechne beide Seiten von Gl. (1). Benutzen Sie dabei ohne Beweis, dass

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin^2\varphi = \pi, \qquad \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin^3\theta = \frac{2}{3}, \qquad \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta \cos^2\theta = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

(Nebenbei bemerkt lassen sich solche Integrale oft auswerten, indem man die Winkelfunktion durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrückt.)

Aufgabe 9: Flächen-unabhängige Integrale (30 Punkte)
So wie das Wegintegral eines Gradientenfeldes von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$ unabhängig von der Wahl des Weges von $\underline{p}$ nach $\underline{q}$ ist, so ist das Flächenintegral eines Rotationsfeldes unabhängig von der Wahl der Fläche, die in eine gegebene Randkurve eingespannt wird. Das heißt: Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ orientierte stückweise-C^1-Flächen in $\mathbb{R}^3$ mit $\partial\mathcal{F}_1 = \partial\mathcal{F}_2$ inklusive Orientierung, und ist $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1, dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}_1} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{\mathcal{F}_2} \operatorname{rot} \underline{f} \cdot d\underline{S}\,. \tag{3}$$

a) Begründen Sie dies aus dem Integralsatz von Stokes.

b) Begründen Sie dies aus dem Integralsatz von Gauß.

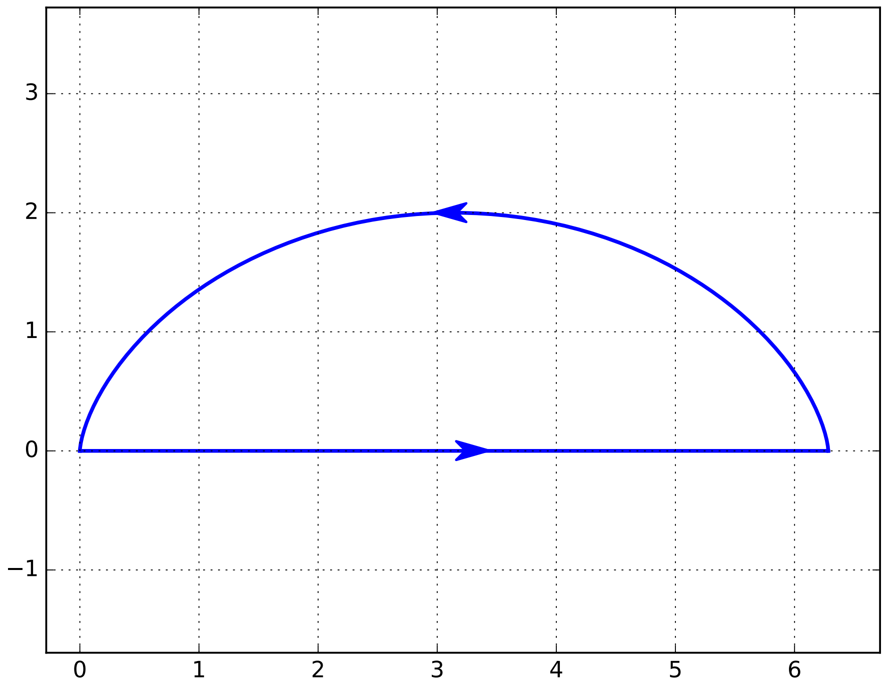
Aufgabe 10: Anwendung des Greenschen Integralsatzes (25 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie: Ist der geschlossene Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stückweise C^1, injektiv auf $[a,b)$ und positiv orientiert, dann ist für die von γ umlaufene Region B

$$\text{Flächeninhalt}(B) = \frac{1}{2} \int_\gamma x\,dy - y\,dx\,.$$

Aufgabe 11: Anwendung von Aufgabe 10 (25 Zusatzpunkte)
Ein markierter Punkt auf einem rollenden Rad bewegt sich entlang der Kurve

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

für $t \in [0, 2\pi]$, genannt die *Zykloide*; sie ist (bis auf den entgegengesetzten Durchlaufsinn) der obere Teil der Kurve im Bild unten. Nun sei B die zwischen der Zykloide und dem Intervall $[0, 2\pi]$ auf der x-Achse eingeschlossene Fläche. Man berechne den Flächeninhalt von B.



Abgabe: Bis Freitag, 8.7.2022, um 14 Uhr in den Briefkasten von Herrn Costa.