Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2023
10. Mai 2023

Integralsätze: Übungsblatt 4

Aufgabe 4: Konservative Vektorfelder
Sei $\underline{A}$ wie in Aufgabe 2 auf Blatt 2 das Vektorfeld

$$\underline{A}(x_1, x_2) = \frac{b}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ mit $b \neq 0$. Aus Aufgabe 2 folgt, dass $\underline{A}$ nicht konservativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial A_1/\partial x_2 = \partial A_2/\partial x_1$.

(b) Wie kann das sein? Wieso folgt aus (a) nicht mit dem Integrabilitätskriterium, dass $\underline{A}$ konservativ ist?

(c) Seien (r, φ) Polarkoordinaten, $(x_1, x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Hierbei hat man die Freiheit, für φ irgendein Intervall $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ der Länge 2π wählen; dann ist φ als Funktion von (x_1, x_2) auf der geschlitzten Ebene $E_\alpha := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) : r \geq 0\}$ stetig differenzierbar. Erklären Sie geometrisch, warum auf E_α gilt $\underline{A} = b\nabla\varphi$. Also ist $\underline{A}$ lokal ein Gradient.

Abgabe: bis Freitag 19.5.2023 um 10:15 Uhr.