Prof. Dr. Roderich Tumulka
Universität Tübingen

Sommersemester 2023
5.7.2023

Übungsklausur Integralsätze

Dies sind Aufgaben im Stile der Klausuraufgaben, allerdings umfangreicher als in der Klausur. Bücher und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur nicht erlaubt. Sie dürfen eine Seite mit handschriftlichen Notizen mitbringen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch?

- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $f(x,y) = (x-y, x+y)$ ist ein Gradientenfeld in $\mathbb{R}^2$.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sei $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig. Ändert man die Orientierung der C^1-Kurve γ in $\mathbb{R}^3$, so ändert das vektorielle Kurvenintegral $\int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}$ sein Vorzeichen.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig. Ändert man die Orientierung der C^1-Kurve γ in $\mathbb{R}^3$, so ändert das skalare Kurvenintegral $\int_\gamma f \, ds$ sein Vorzeichen.
- $\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn das Vektorfeld $\underline{f}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ definiert und dort C^1 ist, und wenn $\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$ gilt $\forall i,j \in \{1,2\}$, dann ist $\underline{f}$ ein Gradientenfeld, $\underline{f} = \nabla F$ mit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Flächen-Unabhängigkeit

Sei $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^3}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \underline{f}(\underline{x}) = 0$ für alle $\underline{x} \neq \underline{0}$.

(b) Sei $B_r(\underline{0})$ die Kugel vom Radius r um den Ursprung. Beantworten Sie folgende Fragen ohne Begründung oder Rechnung durch Wissen oder geometrische Überlegung: Wie lautet der Flächeninhalt der Sphäre $S_r(\underline{0}) := \partial B_r(\underline{0})$? Wie lautet der äußere Einheitsnormalenvektor $\underline{n}(\underline{x})$ auf $S_r(\underline{0})$ bei $\underline{x}$?

(c) Zeigen Sie (möglichst knapp), dass $\int_{S_r(\underline{0})} \underline{f} \cdot d\underline{S} = 4\pi$ für alle $r > 0$.

(d) Wo liegt der Fehler in folgendem Argument? Da $\operatorname{div} \underline{f} = 0$, folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, dass $\int_{S_r(\underline{0})} \underline{f} \cdot d\underline{S} = \int_{B_r(\underline{0})} d^3\underline{x} \operatorname{div} \underline{f} = 0$.

(e) Zeigen Sie: $\int_{\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S} = 4\pi$ für jede (nach außen orientierte) stückweise-C^1-Fläche $\mathcal{F}$, die den Ursprung umschließt, d.h. für die gilt $\underline{0} \notin \mathcal{F} = \partial \widetilde{B}$ mit kompaktem $\widetilde{B} \subset \mathbb{R}^3$ und $\underline{0} \in \widetilde{B}$. (*Tipp*: Es gibt $R > 0$ so, dass $\mathcal{F} \subset B_R(\underline{0})$.)

Aufgabe 3: Divergenz und Gradient

In $\mathbb{R}^3$ sei $\underline{f}(\underline{x}) = g(\|\underline{x}\|)\underline{x}$. Finden Sie eine C^1-Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ so, dass $\operatorname{div} \underline{f} = 5\|\underline{x}\|^2$. Zeigen Sie außerdem, dass $\underline{f}$ ein Gradientenfeld ist, und finden Sie eine Stammfunktion F von $\underline{f}$.

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $D \subset U$ ein Normalbereich und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Der Graph von f über D ist die Menge $\operatorname{graph} f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$.

(a) Zeigen Sie, dass man $\operatorname{graph} f$ als glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$ auffassen kann.

(b) Benutzen Sie (a), um eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt von $\operatorname{graph} f$ anzugeben.