

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 11.05.23

10.1 Eigenwerte & Eigenvektoren

Zum Einstieg multiplizieren wir ein paar Matrizen und Vektoren:

$$\text{https://youtu.be/rCUq0_pAQ70 (5 min)} \quad (1)$$

Definition: (Eigenwert, Eigenvektor)

Sei A eine quadratische Matrix, d.h. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) von A , wenn gilt:

$$\text{Es gibt ein } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \quad (2)$$

Jedes solche $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ heißt zugehöriger Eigenvektor (EV).

$$\text{Warum } \vec{x} \neq \vec{0}? \text{ Und warum "Jedes"? } \text{https://youtu.be/4u0YcI4bS9I (2 min)} \quad (3)$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Lemma. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

$$\text{Beispiel: } \text{https://youtu.be/IZaU2LgYsz0 (3 min)} \quad (4)$$

$$\text{OK, aber wieso? } \text{https://youtu.be/2VkJdTrqaZA (3 min)} \quad (5)$$

Bestimmen Sie nun selbst alle EWe von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Zum EW λ gehörende EVen lösen das homogene LGS $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

$$\text{Beispiel: } \text{https://youtu.be/g2-21KxyY4k (4 min)} \quad (7)$$

Bestimmen Sie nun auch alle EVen von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Die EWe und EVen mancher Matrizen haben besonders hübsche Eigenschaften. Deshalb lohnen sich ein paar Definitionen...

10.2 Einige Begriffe

Definition: Sei A eine quadratische Matrix, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (i) A heißt hermitesch, falls $\overline{A}^T = A$.
- (ii) A heißt symmetrisch, falls A reell, also $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $A^T = A$.
- (iii) A heißt unitär, falls $\overline{A}^T A = I$ (d.h. $A^{-1} = \overline{A}^T$).
- (iv) A heißt orthogonal, falls A reell, also $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $A^T A = I$ (d.h. $A^{-1} = A^T$).

Beispiele und Erläuterungen: https://youtu.be/PERKs_a2db8 (9 min) (9)

Konsequenzen:

- (U1) Die Spalten einer unitären $n \times n$ -Matrix bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n .
https://youtu.be/nfI_1IoV0tg (8 min)
 - (U2) A unitär $\Rightarrow |\det A| = 1$.
 - (U3) Produkte unitärer Matrizen sind unitär.
<https://youtu.be/cUkfveBVwB0> (3 min)
 - (U4) Unitäre Transformationen erhalten Längen und Winkel.
<https://youtu.be/TLuQe1UXFMo> (4 min)
 - (H1) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch $\Leftrightarrow \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$.
<https://youtu.be/egt63FyPfXA> (6 min)
 - (H2) Ist $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch, so ist auch $\overline{A}^T B A$ hermitesch (für beliebiges $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$).
- Überlegen Sie selbst,** warum (U2) und (H2) richtig sind.