Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 15.05.23

10.3 Diagonalisierbarkeit

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine reguläre (d.h. invertierbar) Matrix S gibt, so dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ https://youtu.be/vB2AEQos1vY (4 min) (2)

Wozu könnte das gut sein? https://youtu.be/TZjfxLojZCo (4 min) (3)

Bemerkungen:

$$S = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n) \text{ ist regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det S \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n \text{ sind l.u.} \tag{4}$$

Ist A diagonalisierbar, so sind die λ_j EWe mit zugehörigen EVen $\vec{s}_j$:

https://youtu.be/qY5DDOpZANc (4 min) (5)

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer l.u.:

https://youtu.be/zWxa6sOiyys (4 min) (6)

Damit sind $n\times n$-Matrizen mit n *unterschiedlichen* EWen automatisch diagonalisierbar.

Überlegen Sie selbst: Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Hinweis: Bestimmen Sie EWe und eventuell EVen.

Hermitesche (und symmetrische) Matrizen sind besonders schön, denn

ihre EWe sind reell https://youtu.be/_sDeDYRdMj4 (2 min) und (8)

EVen zu unterschiedlichen EWen sind orthogonal zueinander
https://youtu.be/APXaucIgtF4 (3 min) (9)

Es gilt sogar. . .

Satz. (Hauptachsentransformation)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch (symmetrisch), dann existiert eine unitäre (orthogonale) Matrix U mit

$$\overline{U}^T AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei λ_j die Eigenwerte von A sind.

Was wäre überhaupt noch zu zeigen? https://youtu.be/R4Cedn9XP2c (4 min) (11)

Kurzanleitung zur Hauptachsentransformation (HAT)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch (oder $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch)

(i) Berechne das charakteristische Polynom χ_A.

(ii) Bestimme die Nullstellen von χ_A (also die EWe von A) mit Vielfachheiten.

(iii) Bestimme zu jedem EW genügend (so viele wie die Vielfachheit der Nullstelle) zueinander orthogonale, normierte EVen $\vec{u}_j$.

(iv) Dann ist $U = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ unitär (orthogonal), und $\overline{U}^T AU$ ist diagonal.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \tag{12}$$

https://youtu.be/0FwSJq90Pxk (12 min)

Anwendung:

A diagonalisierbar: $e^{Ax} = ?$ https://youtu.be/GkyDmVo_TY4 (7 min) (13)

Überlegen Sie selbst: Wenn A hermitesch ist, wie können wir dann die HAT verwenden, um A^{-1} zu berechnen? Und an welcher Stelle erkennen wir, ob A überhaupt invertierbar ist?