Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 22.05.23

10.4 Quadratische Formen

Wir zeichnen eine Ellipse...

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \texttt{https://youtu.be/md3fb8-Kx4E} \text{ (3 min)} \tag{1}$$

...und eine Hyperbel:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \texttt{https://youtu.be/ZKubJ0feuxQ} \text{ (5 min)} \tag{2}$$

Zeichnen Sie selbst:

$$4x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad y^2 - 4x^2 = 1\,. \tag{3}$$

Leider erkennen wir momentan nicht auf einen Blick, was

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1 \tag{4}$$

beschreibt. In all diesen Gleichungen ist die linke Seite eine sogenannte *quadratische Form*, und die stehen in Eins-zu-eins-Zusammenhang mit den symmetrischen Matrizen:

https://youtu.be/mAA0rrCKfkM (6 min) (5)

Übrigens: Wir können quadratische Formen sowohl mit Matrixprodukten als auch als (kanonisches) Skalarprodukt schreiben,

$$q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A\,\vec{x} = \langle \vec{x}, A\,\vec{x} \rangle\,. \tag{6}$$

Überlegen Sie selbst: Wie sieht die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ aus, die zu

$$q_A(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_4^2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_4 \qquad \text{gehört?} \tag{7}$$

Zweidimensionale quadratische Formen beschreiben Kegelschnitte.
Genauer: Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, so beschreibt $q_A(\vec{x}) = 1$

- eine Ellipse, wenn A zwei positive EWe hat,
- eine Hyperbel, wenn A einen positiven und einen negativen EW hat,
- zwei parallele Geraden, wenn ein EW Null ist, und der andere positiv.

Für Diagonalformen – die gehören zu Diagonalmatrizen – sehen wir das sofort.

Wirklich? https://youtu.be/Y2aPiTn3EsY (3 min) (8)

Für allgemeine A hilft uns die folgende Aussage.

Lemma. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ orthogonal. Mit*

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{u}_j\,, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\,, \tag{9}$$

gilt dann

$$q_A(\vec{x}) = q_B(\vec{y})\,, \quad \textit{wobei} \quad B = U^T A U\,. \tag{10}$$

Warum? https://youtu.be/HPPsZ6dx2YQ (2 min) (11)

Und wie hilft das jetzt? https://youtu.be/0k36xXlz7Ks (5 min) (12)

Nun können wir

$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$ zeichnen. https://youtu.be/-nlyGJvxpcw (4 min) (13)

Überlegen Sie selbst: Was für Kegelschnitte werden durch

$$10x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 1 \quad \text{und} \quad 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 = 1 \tag{14}$$

beschrieben? Geben Sie nur den Typ an (Ellipse, Hyperbel,...). Sie müssen sie nicht zeichnen.

Bei unserer Diskussion von Kegelschnitten war es wichtig, zu wissen, welche Vorzeichen eine quadratische Form annehmen kann. Das motiviert die folgende Definition für symmetrische Matrizen bzw. quadratische Formen.

Definition: (Definitheit)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. A, beziehungsweise die quadratische Form q_A, heißt:

- positiv definit $\Leftrightarrow \quad q_A(\vec{x}) > 0 \quad \forall\, \vec{x} \neq \vec{0}$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow \quad q_A(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall\, \vec{x}$
- negativ definit $\Leftrightarrow \quad q_A(\vec{x}) < 0 \quad \forall\, \vec{x} \neq \vec{0}$
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow \quad q_A(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall\, \vec{x}$
- indefinit $\Leftrightarrow \quad \exists\, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ mit $q_A(\vec{x}_1) > 0$ und $q_A(\vec{x}_2) < 0$

Überlegen Sie: Wie hängt Definitheit mit den Eigenwerten der Matrix zusammen?