

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 25.05.23

Definitheit (Fortsetzung)

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und U orthogonal mit $U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Dann sind äquivalent:

- (i) A bzw. q_A ist positiv definit
- (ii) $\lambda_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$
- (iii) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \nu = 1, \dots, n$ (Hauptunterdeterminanten > 0)

Bemerkung: A ist negativ definit $\Leftrightarrow (-A)$ ist positiv definit

Die Äquivalenz von (i) und (ii) haben wir bereits letztes Mal gesehen.

Aber wie funktioniert (iii)?

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ <https://youtu.be/9-yD1JONTuw> (3 min) (1)

Und warum funktioniert (iii)? <https://youtu.be/Bg8tLi4Gjpc> (8 min) (2)

Untersuchen Sie jedes der drei Kriterien aus dem Satz für

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Übrigens: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen $\det A$ und $\det(-A)$. Überlegen Sie kurz selbst, bevor Sie das Video anschauen.

<https://youtu.be/kDgKUOef2Ws> (3 min) (4)

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit, am besten mittels (iii):

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

11 Differentiation in mehreren Variablen

Worum soll es jetzt gehen? Zur Einstimmung werfen wir einen Blick in die Vorlesung aus dem Sommersemester 18:

https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20180528_002_mathnat2_0001?t=196.00 (11 min) (6)

Der Link springt direkt zu 3:16 – stoppen Sie bitte bei 14:25.

Noch lustiger in doppelter Geschwindigkeit!

Zeichnen Sie die Graphen von

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad g(x, y) = e^{-(x-1)^2 - 4(y-1)^2}, \quad (7)$$

perspektivisch und/oder mit Höhenlinien.

11.1 Punktmengen und Folgen in \mathbb{R}^n

Hier geht es zunächst um Wiederholung, Notation und Begriffe. Wirklich Neues passiert erst in Abschnitt 11.2.

Unsere Funktionen hängen jetzt von einem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ab, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Wir schreiben austauschbar $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Wir verwenden stets die Norm, die vom kanonischen Skalarprodukt kommt, und notieren sie als Betrag,

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (9)$$

Das kanonische Skalarprodukt notieren wir mit einem Punkt,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j. \quad (10)$$

Vorsicht: Manchmal verwenden wir auch Matrixprodukte,

$$\text{(Skalarprodukt)} \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \quad \text{(Matrixprodukt)} \quad (11)$$

ε -Umgebungen sind Kreisscheiben bzw. Bälle:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\vec{x}_0) &:= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon\} && \text{(offene } \varepsilon\text{-Umgebung von } \vec{x}_0), \\ \overline{U}_\varepsilon(\vec{x}_0) &:= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq \varepsilon\} && \text{(abgeschlossene } \varepsilon\text{-Umgebung von } \vec{x}_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Definition: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- offen, falls zu jedem $\vec{x} \in M$ ein $\varepsilon(\vec{x}) > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset M$.
- abgeschlossen, falls $M^C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin M\}$ offen ist.
- beschränkt, falls es ein $K > 0$ gibt, mit: $\vec{x} \in M \Rightarrow |\vec{x}| \leq K$.
- kompakt, falls M sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

Anschaulich bedeutet das zunächst mal, dass offenen Mengen keine Randpunkte enthalten:

$$\text{https://youtu.be/DOPY7kBkHkc (6 min)} \quad (13)$$

Überlegen Sie: Sind die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 2\}, & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}, \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 2\}, & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}. \end{aligned} \quad (14)$$