

## Mathematik 2 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 17.07.23

---

### 13 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

#### 13.1 Grundbegriffe<sup>1</sup>

Wir bedienen uns der Mengenschreibweise:

Ereignisse und (Teil-)Mengen     <https://youtu.be/fHK2aVwP4ko> (2 min)     (1)

Potenzmenge und  $\sigma$ -Algebren     [https://youtu.be/v-HCBZK8\\_\\_Q](https://youtu.be/v-HCBZK8__Q) (3 min)     (2)

Mengenoperationen     <https://youtu.be/PMwkaZoedsQ> (3 min)     (3)

Nun wollen wir Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen:

Wahrscheinlichkeitsmaße und -räume  
... mit Beispielen     <https://youtu.be/VKRNu2b0Zgo> (8 min)     (4)

---

*Jetzt müssen wir oft Dinge abzählen, daher...*

#### 13.2 Kombinatorik

Anzahl möglicher Anordnungen von  $n$  (unterschiedlichen) Objekten:

$n(n-1)\cdots 1 = n!$      [https://youtu.be/l1\\_dbrCbv\\_4](https://youtu.be/l1_dbrCbv_4) (1 min)     (5)

Anzahl möglicher Anordnungen von  $n$  Objekten, die in  
 $j$  Gruppen mit jeweils  $k_1, k_2, \dots, k_j$  gleichen Objekten vorkommen ( $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$ ):

$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_j!}$      <https://youtu.be/-ySdGGjHCm8> (3 min)     (6)

#### Urnenmodelle

- Urne mit  $n$  unterschiedlichen Kugeln
- Ziehe  $k$  Kugeln

Anzahl der möglichen Ergebnisse:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

---

<sup>1</sup>Wenn Sie Theorie nicht so prickelnd finden, können Sie auch erst mal zur Kombinatorik vorspringen, und nur bei Bedarf hier nachschauen – oder Sie gucken sich sogar als erstes die Würfelzwerge an.

Drei Fälle... <https://youtu.be/q5k0irz1USg> (4 min) (7)

... und der Vierte. [https://youtu.be/pRA3-\\_rVkwg](https://youtu.be/pRA3-_rVkwg) (4 min) (8)

**Beispiel:** Würfelzwerge!

<https://youtu.be/tXH1FDI8yhM> (2 min) (9)

**Überlegen Sie:**

- Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, mit fairen Farbwürfeln die Kombination für einen ein-, zwei- oder dreifarbigem Zwerg zu würfeln?
- Wieviele ein-, zwei- und dreifarbige Zwerge gibt es jeweils?
- Wieviele Kärtchen hat das Spiel?

---

Im Folgenden ist  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

### 13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

**Definition: (Bedingte Wahrscheinlichkeit)**

Seien  $A, B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) \neq 0$ . Wir nennen

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (10)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$ .

*Warum definieren wir das so?* <https://youtu.be/n41jtHkpB6k> (2 min) (11)

**Beispiel:**

Nochmal Würfeln [https://youtu.be/0\\_1bhfERD90](https://youtu.be/0_1bhfERD90) (3 min) (12)

**Definition: (Stochastische Unabhängigkeit)**

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen (stochastisch) unabhängig, falls gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

*Diese Definition ist gut, weil...* <https://youtu.be/jyX1kjA87x8> (1 min) (13)

---

Wir haben bereits gesehen, dass i.A.  $P(A|B) \neq P(B|A)$ . Mit genügend zusätzlicher Information können wir die beiden aber ineinander umrechnen.

**Satz. (Bayes)**

Seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  disjunkt mit  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$ , und sei  $B \subseteq \Omega$  mit  $P(B) \neq 0$ .

Dann gilt für jedes  $j = 1, \dots, n$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)}. \quad (14)$$

**Beweis:** <https://youtu.be/XCtan0161eY> (8 min) (15)

### Beispiel: Antigen(AG)-Schnelltest auf SARS-CoV-2

Bei einem klinischen Test bezeichnet die *Sensitivität* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test Infizierte als infiziert erkennt; die *Spezifität* bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Nichtinfizierte als nicht-infiziert erkennt. Als *Prävalenz* wird der Anteil der Infizierten an der Bevölkerung (oder einer anderen untersuchten Gruppe) bezeichnet.

Auf dem Beipackzettel eines AG-Schnelltests auf SARS-CoV-2 wird die Sensitivität mit 96,2% angegeben, die Spezifität mit 99,2%. Laut RKI-Lagebericht vom 6.7.21 gibt es in Deutschland aktuell ca. 10 000 aktive Corona-Fälle. Genesen oder vollständig geimpft sind ca. 44% der Bevölkerung. Damit beträgt die Prävalenz unter den Restlichen ca. 0,02%.

Eine zufällig ausgewählte Person (nicht genesen, nicht vollständig geimpft) führt obigen AG-Schnelltest durch. Der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich infiziert ist?

<https://youtu.be/4cVDH0Ma3lo> (7 min) (16)

Ihre Corona-Warn-App schlägt Alarm. Sie hatten Kontakt mit einer akut infizierten Person. Wir nehmen an, Ihr Risiko sich angesteckt zu haben, beträgt 10 %. Sie führen obigen AG-Schnelltest durch, der Test fällt positiv aus. **Überlegen Sie**, wie groß nun die Wahrscheinlichkeit ist, dass Sie infiziert sind.