Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 20.07.23

13.4 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Definition: Eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt (reelle) Zufallsvariable (ZV), wenn gilt

$$\big\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\big\} \in \mathcal{A} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Was jetzt, Funktion oder Variable? https://youtu.be/bSoAfAGotz8 (3 min) (2)

Definition: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine ZV. Wir nennen $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F_X(x) = P(X \leq x)$ Verteilungsfunktion von X.

Beispiel: Zweifaches Würfeln inkl. Plot als Stufenfunktion https://youtu.be/TgFQmYjPy2Y (4 min) (3)

Eigenschaften von Verteilungsfunktionen https://youtu.be/qOGmONu1Ft4 (2 min) (4)

Beispiel: Binomialverteilung
Wir sagen X ist binomialverteilt mit Parametern n und p,
und schreiben dafür $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, wenn gilt

$$P(X{=}k) = \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k}\,.$$ https://youtu.be/lJRbFdTBnw4 (5 min) (5)

13.7 Hypothesentests[1]

Beispiel: Um Ostern 2020 wurden an der Königlich Technischen Hochschule (KTH) in Stockholm Blutproben von 446 zufällig ausgewählten Stockholmer∗innen auf Antikörper gegen SARS-CoV-2 untersucht. In 45 Proben wurden Antikörper gefunden.[2]

- Dr. T glaubte damals, dass bereits 15% der Bevölkerung Stockholms Antikörper gegen SARS-CoV-2 gebildet habe,
- Dr. B glaubte, dass es nur 8% seien.

Wir untersuchen die Plausibilität von Dr. Ts Annahme mit einem Hypothesentest:

https://youtu.be/jOPkwK5Xw8A (8 min) (6)

Zur Bestimmung des **p-Werts**

[1] Ich behalte die Nummerierung aus dem Skript bei.
[2] https://www.kth.se/en/aktuellt/nyheter/10-procent-av-stockholmarna-smittade-1.980727

- nehmen wir für einen Augenblick an, dass die Nullhypothese wahr ist, und
- berechnen dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Teststatistik den tatsächlich beobachteten Wert annimmt oder einen Wert, der noch stärker *gegen* die Nullhypothese spricht.

Technische Anmerkung: In `GNU Octave` oder MATLAB berechnen wir $P(X \leq 45)$ mit dem Befehl `binocdf(45,446,0.15)`.

Führen Sie analog einen Hypothesentest für Dr. Bs Annahme durch – bis zu der Stelle, an der Sie den p-Wert als Wahrscheinlichkeit $P(X \ldots)$ angeben.

Vertrauensintervalle

Welche Annahmen über den Anteil der Stockholmer∗innen mit Antikörpern sind denn nun mit dem Ergebnis der KTH-Studie vereinbar?

einseitiges 95%-Vertrauensintervall (VI) für w
https://youtu.be/OC-zdlipSzc (5 min) (7)

beidseitiges 95%-VI für w https://youtu.be/Ek0ttsiimsE (8 min) (8)

Überlegen Sie: Wie verändern sich die Vertrauensintervalle (qualitativ) wenn wir statt eines 95%-VIs ein 99%-VI bestimmen, d.h. wenn wir statt auf Signfikanzniveau $\alpha = 5\%$ auf Signifkanzniveau $\alpha = 1\%$ testen?

13.4 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen (Forts.)

Stetige Verteilungen

Bisher haben wir nur diskrete Zufallsvariablen betrachtet. Jetzt wollen wir uns auch kontinuierliche Zufallsvariablen anschauen.

Definition: Eine ZV X mit Verteilungsfunktion F_X hat die (Verteilungs-)Dichte f_X, wenn eine nichtnegative, integrierbare Funktion f_X existiert mit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Folgerungen https://youtu.be/qL0T8pSqW9g (3 min) (10)

Beispiele:

Gleichverteilung https://youtu.be/HU0f1pqD9sk (3 min) (11)

Normalverteilung. Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und sagen X ist normalverteilt mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn X die Dichte

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ hat. https://youtu.be/9R1rRi8seY8 (1 min) (12)

Spezialfall: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ – Standardnormalverteilung. Die Verteilungsfunktion bekommt einen eigenen Namen,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t\,, \tag{13}$$

und ist tabelliert. Einige wichtige Werte:

$$\begin{array}{cc} \Phi(0) = \frac{1}{2} & \Phi(1) \approx 0{,}84 \\ \Phi(1{,}64) \approx 0{,}95 & \Phi(1{,}96) \approx 0{,}975 \end{array} \qquad \text{https://youtu.be/d24CUMi5iSs (3 min)} \tag{14}$$

Bemerkung: Kennen wir die Standardnormalverteilung, so kennen wir jede Normalverteilung, denn wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt, d.h.

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,. \qquad \text{https://youtu.be/5sBAkccKaYA (5 min)} \tag{15}$$

Exponentialverteilung. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ,\quad x < 0 \\ c\,\mathrm{e}^{-ax} & ,\quad x \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

mit einem positiven Parameter a. **Überlegen Sie:** Wie muss c gewählt werden, damit f_X wirklich eine Dichte ist? Bestimmen Sie auch F_X sowie $P(1 \leq X \leq 2)$.